河道効果への非線形モデルの適用 ーAwash川を例としてー

○ 青年海外協力隊 正員 望月 誠美
秋田工業高等専門学校 正員 長谷部正彦
北海道大学 工学部 津田 孝夫

はじめに

R．Awash は Ethiopia の Addis Ababa の近くに源を発し，Rift Valley を下り，L. Abe に注ぐ。本川流路長約900 km，流域面積 113,700 km² で，上流から温暖冬季小雨気候，サバナ気候，中流部でステップ気候，下流部で砂漠気候をもつ。中下流域の東半分はステップ，砂漠で流入する支川はない。他方西半分は Abyssinian 高原から多数の中小支川が流入する。中下流沿いの土地は沖積平野で肥沃であり，Ethiopia政府は10年来この地の農業開発にとりくみ，plantation 農業を導入して開発の実を上げている。しかし，7，8，9月の雨期を除くと，その水量は少なく，開発を進めるならば乾期間の農業に不足を生ずるものと思われる。そこで中流部，下流部それぞれ1ヶ所 Malka Sedi，Tendaho にダムを設け，雨期の水量を貯留し，農業用水に供しようとする計画が着手されている。ダムの計画に必要な流量資料は15年程度しかなく Simulation technic を使って増幅してやる必要がある。しかしながら各観測点間の流路長が長く，その間に支川が流れ込む。乾燥地帯を流れるため蒸発が無視できない。中流部にSwampを持つ。雨期氾濫する。等のため各観測点間の流量の相関は低い。そのためSimulationの信頼度は低いものと考えられる。そこで中流部をAwash-Heltale，Heltale-Tendaho間と2つに分け，河道効果モデル（Over Bank Flow Model）を考え，上流，支川のFlow Simulation をこのモデルを通してから下流懸案地点のSimulationを得ようとするものである。ここではAwash-Heltale間のモデルについて考察する。

2．Over Bank Flow Model

このモデル図-3 は英国のAlexander社が原案を作り，著者が修正したものである。Bank Full Flow をQBF，Over Bank Flowの蒸発，浸透等によるLoss を減小率と考え，Aとすると，Over Bank Flow QQ は

If $QIN + QT \times F > QBF$ then

$QQ = (1 - A)(QIN + QT \times F - QBF)$ otherwise $QQ = 0$

Return Flow QRF は遅滞時間 TL を考え

If $QQ_i < QQ_{i-1}$ then $QRF = (QQ_{i-1} - QQ_i) \times TL + QQ_i$

If $QQ_i > QQ_{i-1}$ then $QRF = (QQ_i - QQ_{i-1})(1 - TL) + QQ_{i-1}$

と比例配分によって求めた。なお河道貯留は考えていない。またSurface runoff は雨量資料が手持ちにないので割愛した。したがって雨期間の計算流量は実測よりかなり下回るものと考えられる。さてここで推定しなければならないパラメータは5つでQBF，TL，RLOSS，A，Fである。QOUTの

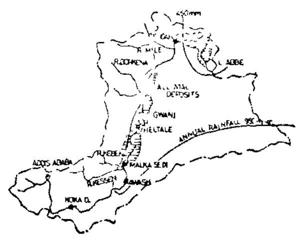

図-1 Awash Valley watershed area

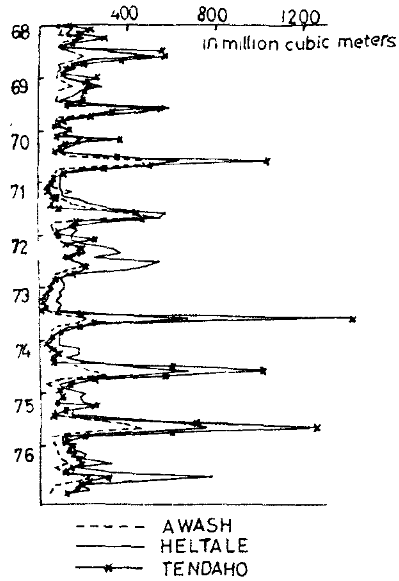

図-2 Monthly discharge

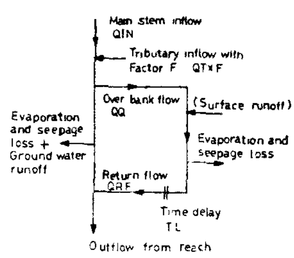

図-3 Over Bank Flow Model

計算値と実測値をもとに、その評価関数値が最小となるように未知パラメータの値を決めることにする。この推定にあたって大久保、津田の非線形パラメータ推定の方法を用いることにし次に示す。

3. 大久保、津田の方法の紹介

$F_i(\mathbf{X}) \triangleq y_i - f(z_i, \mathbf{X}) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots m$　　y_i 実測値, $f(z_i, \mathbf{X})$ 計算値

未知パラメータ $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$, 独立変数 $\mathbf{Z} = (z_1, z_2, \cdots z_k)$ ……(2.1)

を考える。ベクトル表現で $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$ 但し $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \triangleq (F_1(\mathbf{X}), F_2(\mathbf{X}), \cdots F_m(\mathbf{X}))^T$ ……(2.2)

となる。独立変数の1つを実パラメータ t とし方程式(2.2)に埋め込み

$$H(t, \mathbf{X}) \triangleq a(t)\,\mathbf{F}(\mathbf{X}) + b(t)\,\mathbf{G}(\mathbf{X}) = 0 \qquad \cdots\cdots (2.3)$$

を作る。ここでは $\mathbf{X}$ に5つの未知パラメータ、$\mathbf{Z}$ に支川の流量和 QT, t に QIN を用いた。さらに未知パラメータ $\mathbf{X}$ の解の探索領域を n 次元 Euclid 空間の開集合 D として

$$H(t_0, \mathbf{X}_0) = 0 \qquad \mathbf{X}_0 \in D \qquad \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0), \quad H(t_1, \mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \qquad \cdots\cdots (2.4)$$

となるように関数 $a(t)$, $b(t)$ は I_t に於いて連続であるとする。$I_t = [0, \infty]$ で $a(t) = 1$, $b(t) = -e^{-\alpha t}$,

$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0)$ とすると　$H(t, \mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) - e^{-\alpha t}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = 0$ ……(2.5)

が導出される。(2.5)は(2.3),(2.4)を明らかに満足する。(2.5)を t について1階微分すると

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \alpha e^{-\alpha t}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = 0$$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}\right)^{-1} \cdot \alpha e^{-\alpha t}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = -\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}\right)^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) \qquad \cdots\cdots (2.6)$$

これはパラメータ $\mathbf{X}$ に関する初期値問題である。原則的に任意に初期値 $\mathbf{X}_0$ を指定できる。また $\left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}\right)^{-1}$ は $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ のヤコビアン行列の一般化逆行列である。数学では $J_F^+(\mathbf{X})$ と表している。ここでは(2.6)を代表的な1段法であるルンゲ・クッタ法で解く。実パラメータ t のきざみ幅を h とすれば(2.6)は

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \alpha h \mathbf{K} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots (2.7)$$

となる。ここで $\mathbf{K}_1 = J_F^+(\mathbf{X}_n) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}_n)$, $\mathbf{K}_2 = J_F^+(\mathbf{X}_n) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}_n + h\mathbf{K}_1)$ とすれば $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)/2$ ―(2.8)

となる。ここでは $\alpha = 1.0, 2.0, \cdots 5.0$, $h = 1.0$ とし反復の各段階で評価関数値が最小となる α を選び $\mathbf{X}_{n+1}$ を決める。次に $J_F^+(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X})$ のもとめかたであるが　$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{b}$　但し $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots b_m)^T$ とおくと

$$J_F(\mathbf{X}) \cdot J_F^+(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}\mathbf{b} \qquad \cdots\cdots (2.9)$$

となる。$J_F(\mathbf{X}) = \mathbf{A}$, $J_F^+(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$, $\mathbf{I}\mathbf{b} = \mathbf{B}$ とすると、(2.9)は $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ ……(2.10)

の形となる。これはさらに $\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|$ (ユークリッドノルム)を最小にする $\mathbf{X}$ を決定する線形2乗問題となる。そこでユークリッドノルムはユニタリ不変であるから　$\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}\| = \|\mathbf{C} - \mathbf{R}\mathbf{X}\|$ ……(2.11)

但し $Q^TQ = I$ で　$Q\mathbf{A} = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ……(2.12)

$\tilde{R}$ は $n \times n$ 上三角行列である。このとき明らかに(2.11)を最小にするのは $\hat{\mathbf{X}} = \tilde{R}^{-1}\tilde{C}$ である。$\tilde{C}$ は m 次元ベクトル $\mathbf{C}$ の最初の n 個の成分である。この分解(2.12)はハウスホールダー変換によって実現できる。一旦、方程式(2.11)に対する解 $\hat{\mathbf{X}}$ が得られると単純な反復法によって解の精度を上げることができる。$\bar{\mathbf{X}}$ を最初に得られる解とし、$\hat{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{e}$ とすると　$\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}\| = \|\mathbf{r} - \mathbf{A}\mathbf{e}\|$　但し $\mathbf{r} = \mathbf{B} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}}$ ……(2.13)

となる。したがって修正ベクトル $\mathbf{e}$ はそれ自身、線形最小2乗問題に対する解である。次に $\mathbf{A}$ の rank が n より小さくなる場合を考える。この場合は(2.10)を直接解くことができないので次のような $n \times n$ 行列 $\mathbf{A}'$ を導入する。すなわち(2.10)を $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{pmatrix}$ として、この場合の行列の階数が n となるように行列 $\mathbf{A}'$ を決定する。$\mathbf{A}'$ の自然な定義として　$\mathbf{A}' = \nu \mathbf{I}$　$\nu > 0$ ……(2.14)

が考えられる。ν の初期値を　$\nu_0 = r(|\min_{ij} a_{ij}| + |\max_{ij} a_{ij}|)$　$r > 0$ ……(2.15)

とし、初期値問題を解くときの反復の各段階で　$\nu_{n+1} = r_1 \nu_n$ ……(2.16)

とした。$n-1$ 段階の評価関数値が n 段階の値より大きい時 $0 < r_1 < 1$, その逆の時は $1 < r_1 < +\infty$ である。ここでは $r = 0.5$, $r_1 = 0.9$ or 1.2 を用いた。