

長方形水路の摩擦速度分布について

日本大学工学部 正員 木村喜代治

長方形水路における流れが層流の場合は摩擦速度分布を理論的に求めることが出来る¹⁾。しかし乱流の場合は二次流が存在し Reynolds の運動方程式から理論的に摩擦速度分布を求めることは困難である。乱流の場合に近似的に求める方法としては、先きに著者の示した方法²⁾や Keulegan³⁾, Einstein³⁾, Powell⁴⁾, Hargwood⁴⁾, 足立⁵⁾などの流水断面積分法および Keulegan³⁾ による三角関数的表示法などがある。なお、断面積分法では、ある一つの測点については一様に平均的な値が示される。

本報は乱流理論からみて、著者の方法や断面積分法について検討を加え、また Bazin の実験結果を用いてこれらの方法や Keulegan³⁾ による三角関数的変化とする方法などについて若干の考察を試みた。

Reynolds の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right\} &= -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + \rho g \xi) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xx} - \rho \bar{u}'u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{yx} - \rho \bar{u}'v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{zx} - \rho \bar{u}'w') \\ \rho \left\{ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right\} &= -\frac{\partial}{\partial y} (\bar{p} + \rho g \xi) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}'v') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{yy} - \rho \bar{v}'v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{zy} - \rho \bar{v}'w') \\ \rho \left\{ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right\} &= -\frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + \rho g \xi) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xz} - \rho \bar{u}'w') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{yz} - \rho \bar{v}'w') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{zz} - \rho \bar{w}'w') \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

分子粘性による法線および切線応力は小さい。流れは等流とし、二次流は主流に直角な方向も主流の方向にもないものとする、式(1)第一式および第三式より流れに直角な断面内では $\bar{p} + \rho g \xi = \text{const} = \rho g H$ (ξ : 基準面よりの高さ)となる。また式(1)の第一式は

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + \rho g \xi) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{u}'v') - \frac{\partial}{\partial z} (\rho \bar{u}'w') = 0 \quad (2)$$

長方形水路(簡単なため左右壁面粗度は相等しいとする)は水路の中央で $\rho \bar{u}'v' = 0$ 、水面で $\rho \bar{u}'w' = 0$ であることから Fig. 1 の斜線部分について取り扱われる。式(2)をこの部分について積分すると

$$\int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^h \left\{ \frac{\partial (-\rho \bar{u}'v')}{\partial y} + \frac{\partial (-\rho \bar{u}'w')}{\partial z} \right\} dy dz = \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^h \rho g \frac{\partial H}{\partial x} dy dz \quad (3)$$

この式の左辺に Green の定理を用いると

$$\tau_0 = \rho g R I \quad (4)$$

を得る (τ_0 : 全測辺平均の境界摩擦)。この計算過程において

$$\int_0^{\frac{b}{2}} \frac{\partial (-\rho \bar{u}'v')}{\partial y} dy = -\tau_w, \quad \int_0^h \frac{\partial (-\rho \bar{u}'w')}{\partial z} dz = -\tau_b \quad (5)$$

である。この境界摩擦力の分布については、いまのところこの式のみからは明らかに出来ない。そこで著者の方法は、二次元流れにおいては Prandtl の壁法則によって流速分布がよく表わされるから、長方形の流れの水平、鉛直方向に壁面近辺を考慮し

Prandtl の壁法則を用いた。また任意点の流速が、水平、鉛直方向より求めたとき同じになるべきであることより

$$\sqrt{\tau_w/\rho} = u_{*w} = K \cdot \ln \left(\frac{z}{y_*} \right), \quad \sqrt{\tau_b/\rho} = u_{*b} = K \cdot \ln \left(\frac{y}{y_*} \right) \quad (6)$$

を得た。係数 K は式(4)を満足するように決定された。Keulegan³⁾ などによる断面積分法は断面積を断面

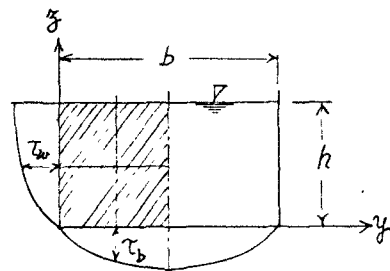


Fig. 1

よる壁面によって支配される数個の部分に分割する。その分割内において流れを二次元乱流と見て、Prandtl の壁法則を適用し、この分割したものを合計し平均流速などを求める。境界摩擦力は各境界ごとに一樣に取ったり、全境界に一樣に取ったりする。元来、断面積分法は、水路側壁の影響評価という観点から物理量の平均量に主眼を置いた取り扱いであり、故にエネルギー消失過程も問題にこない取扱いである。しかし、ここにはあえてこのことにつき考察を加えてみる。足元の論文に述べられているように、断面積分法はその分割線上において平行壁間の流れの中央と同様に、鉛直および水平にそれを模倣する運動量の輸送はないとして取り扱っている。分割内において二次元流と考えるのがあるから、Fig. 3 を参照して式(5)を適用すると U_b は de 間では水深 h の二次元流となって $U_b = f U_{*R}^2 = f g R I$ 、 C では 0、 cd 間では Keulegan の方法のように(壁面、底面が粗度等しい場合のみ取り扱う)分割線が直線であれば U_b は直線的に変化する。同様にして、 U_m は cd 間では $U_m = f g R I$ 、 C では 0、その間直線的に変化する。よってこれによって全開道の平均を取れば式(4)を満足している。Keulegan による摩擦速度分布の三角関数近似は

$$\frac{U_{yb}}{U_{*R}} = A_b + B_b \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{2y}{b}\right), \quad \frac{U_{ym}}{U_{*R}} = A_m + B_m \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{h}\right) \quad (7)$$

ここで A_b, B_b, A_m, B_m などは U_{yb}, U_{ym} などの計測値から決定する定数である。Keulegan が直接式示しているのは $A_b = A_m$ であるが、計測値により合致せしめる意味では定数を別にした。計測値からこれらの定数を最小自乗法など求め、それにより示された式(7)より全開道の境界摩擦力の総計が求まる。しかしこの値は必ずしも断面全体の $\tau_w A I$ に一致しない。そこでこれらの実験定数はこの補正を必要とする。

Bazin の実験の Series 55 No. 2 と Series 56 について計測値と計算値とを比較したのが Fig. 4, 5 である。

図中の破線は Fig. 3 に示した計算値であり、実線は式(6)による計算値または点線は定数を補正した式(7)による計算値である。

また摩擦速度を全開道一樣とすれば U_{*R} 、 U_{*R}/U_{*R} は常に 1.0 とする。

一参考文献一

1. 水利学会誌

論文集, 1965, 1966

2. 水利学会誌

論文集, 2515, 1996

3. G.H. Keulegan, RPI 151

, NBS, USA, 1938

4. R.W. Powell, Trans. A

SCE, Vol. III, 1946

5. H. Bazin, L'Académie

des Sciences, Tome 19, 1865

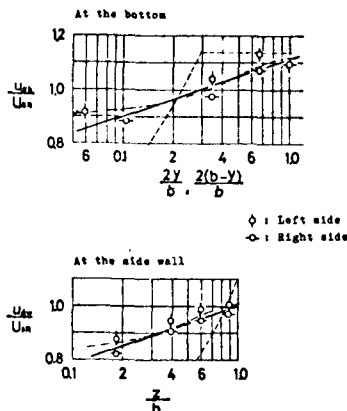


Fig. 4 Distribution of friction velocity, Bazin's data, series 55 No. 2.

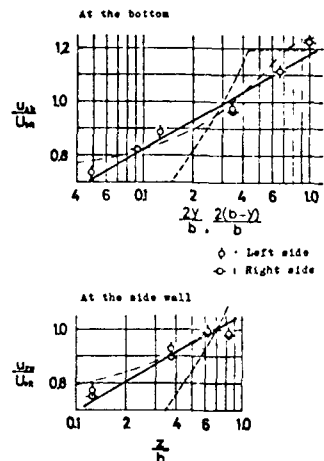


Fig. 5 Distribution of friction velocity, Bazin's data, series 56.