

球かを有する弾性体中の円形き裂に関する考察

東北大学 学・平井弘義
東北大学 正 佐武正雄

1. 緒言

材料中の欠陥による応力集中係数やき裂の応力拡大係数など破壊の問題に対して多くの研究がなされてきている。Newman¹⁾は平面問題として、円孔がき裂平面に対して垂直方向に存在する無限体の応力拡大係数を求めた。本論文においては三次元問題として、球かがり円形き裂面に対して垂直方向に存在する無限体を考え、球かの影響による円形き裂の応力拡大係数の変化について考察する。解析では、まず円形き裂面の境界条件を双積分方程式に持ち込み、未知関数を未定係数で表わし、次に球か面の境界条件を未定係数の無限連立一次方程式に帰着させた。

2. 変位ポテンシャルと境界条件

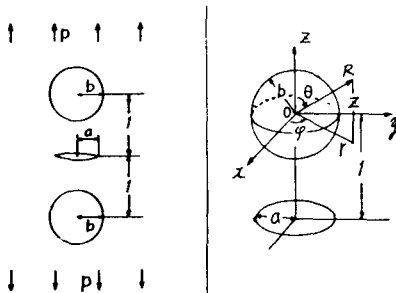


図1. 球かと円形き裂と 図2. 座標系

有する無限体の引張り

図1. に示すようなz軸の無限遠方で分布引張り荷重Pを受ける無限体について考える。対称性を考慮して図2. のように座標系をとり、円柱座標 (r, φ, z) 、球座標 (R, θ, φ) を用い、円形き裂の中心から球か中心Oまでの距離を1とし、これを単位長さとする。変位ポテンシャルとして次のものを選ぶ、

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, 2Gu_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, 2Gu_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ 2Gu_x &= z \frac{\partial \Psi}{\partial x}, 2Gu_y = z \frac{\partial \Psi}{\partial y}, 2Gu_z = z \frac{\partial \Psi}{\partial z} - (3-4\nu)\Psi, \end{aligned} \right\} (1)$$

ここに $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Psi = 0$ である。いま、 $\Phi = \frac{P}{1+\nu} \times P R^2 P_2(\mu)$, $\Psi = -\frac{P}{2(1+\nu)} R P_1(\mu)$ とすればz軸の無限遠方で分布引張り荷重Pを受ける無限体の解が得られる。ここに $\mu = \cos \theta$ である。この場合次のような応力が球か面に生じている、

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_R}{P} \right)_{R=b} &= \frac{1}{3} (P_0(\mu) + 2P_2(\mu)), \\ \left(\frac{\tau_{\varphi\theta}}{P} \right)_{R=b} &= -\frac{1}{3} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \mu} P_2(\mu). \end{aligned} \right\} (2)$$

また円形き裂面には次のような応力が生じている。

$$\sigma_z = p, \quad 0 \leq r < a, \quad \text{-----} (3)$$

次に無限遠方で全ての応力及び変位が消失し、以下のような境界条件を満足する解を導き式(1)の解に重ね合わせれば、球かと円形き裂を有する無限体の引張りに対する解が得られる。

(i) 円形き裂面 $z = -1$ において

$$\tau_{rz} = 0, \quad 0 \leq r, \quad \text{-----} (4)$$

$$u_z = 0, \quad a < r, \quad \text{-----} (5)$$

$$\sigma_z = -p, \quad 0 \leq r < a, \quad \text{-----} (6)$$

(ii) 球か面 $R = b$ において

$$\left(\frac{\sigma_R}{P} \right)_{R=b} = -\frac{1}{3} (P_0(\mu) + 2P_2(\mu)), \quad \text{-----} (7)$$

$$\left(\frac{\tau_{\varphi\theta}}{P} \right)_{R=b} = \frac{1}{3} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \mu} P_2(\mu), \quad \text{-----} (8)$$

さて、球調和関数と円柱調和関数について次式のものを用いる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= P \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{P_n(\mu)}{R^{n+1}}, \\ \Psi &= P \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{P_n(\mu)}{R^{n+1}}, \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= P \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda, \\ \Psi &= P \int_0^{\infty} \lambda \psi(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda. \end{aligned} \right\} (10)$$

3. 解析方法

まず球関数と次式により円柱関数で

表わす。

$$\frac{P_n(\omega)}{R^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \lambda^n J_0(\omega r) e^{\lambda^2 z} d\lambda, (z < 0). \quad (11)$$

式(9), (10)より得られる応力を重ね合わせ, 式(4)より次式を得る。

$$\lambda \{ \varphi(\omega) + (1-2\nu-\lambda) \psi(\omega) \} e^\lambda = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \lambda^m \{ \lambda A_m - (1-2\nu+\lambda) B_m \} e^{-\lambda} \quad (12)$$

次に式(5), (6)に式(12)を代入すると次のようになる。

$$2(1-\nu) \int_0^\infty \{ \lambda \psi(\omega) e^\lambda + \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \lambda^m B_m e^{-\lambda} \} J_0(\omega r) d\lambda = 0, \quad a < r, \quad (13)$$

$$\int_0^\infty \lambda \{ \lambda \psi(\omega) e^\lambda + \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \lambda^m \{ 2\lambda A_m + (4\nu-3-2\lambda) B_m \} e^{-\lambda} \} J_0(\omega r) d\lambda = -1, \quad 0 \leq r < a. \quad (14)$$

式(13), (14)は双積分方程式であり, $\psi(\omega)$ は次のようになる。

$$\psi(\omega) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \left[-\frac{4e^{-\lambda}}{\pi\lambda} d_{m+2}(\omega) A_m - \left\{ \frac{4e^{-\lambda}}{\pi\lambda} (2(\nu-1)d_{m+1}(\omega) - d_{m+2}(\omega)) + \lambda^{-\nu} e^{-2\lambda} \right\} B_m \right] - \frac{2e^{-\lambda}}{\pi\lambda} \int_0^a t \sin \lambda t dt, \quad (15)$$

また式(12)より $\varphi(\omega)$ は次のようになる。

$$\varphi(\omega) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \left[\{ (1-2\nu-\lambda) \frac{4e^{-\lambda}}{\pi\lambda} d_{m+2}(\omega) + \lambda^{-\nu} e^{-2\lambda} \} A_m + \{ (1-2\nu-\lambda) \frac{4e^{-\lambda}}{\pi\lambda} (2(\nu-1)d_{m+1}(\omega) - d_{m+2}(\omega)) - 2\lambda^{-\nu} e^{-2\lambda} \} B_m \right] - (2\nu-1+\lambda) \frac{2e^{-\lambda}}{\pi\lambda} \int_0^a t \sin \lambda t dt, \quad (16)$$

ここに

$$d_n(\omega) = (n-1)! \int_0^a \frac{\sin \lambda t}{(1+t^2)^{\frac{n-1}{2}}} \sin(m \arctan t) dt, \quad (17)$$

である。式(15), (16)より円形き裂面の境界条件が満足される。次に円柱関数を次式により球関数で表わす。

$$e^{-\lambda^2 z} J_0(\omega r) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(\lambda R)^n}{n!} P_n(\mu), \quad (18)$$

式(9), (10)より得られる応力を重ね合わせ, 式(15), (16)を用いると境界条件式(7), (8)は A_m, B_m の無限連立一次方程式となり, A_m, B_m が決定される。

円形き裂面 $z=-1$ におけるモード I の応力拡大係数を次式により定義する。

$$K_I = \lim_{r \rightarrow a^+} [2\pi(r-a)]^{\frac{1}{2}} \sigma_z(r, \theta=1), \quad (19)$$

式(19)に $\sigma_z(r > a)$ を代入すると次式を得る。

$$K_I = \frac{4P}{\sqrt{\pi a}} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \left[r_{m+2}(\omega) A_m + \{ 2(\nu-1) r_{m+1}(\omega) - r_{m+2}(\omega) \} B_m \right] + 2P/\sqrt{\pi}. \quad (20)$$

ここに

$$r_n(a) = \frac{(n-1)!}{(1+a^2)^{\frac{n-1}{2}}} \sin(m \arctan a), \quad (21)$$

である。

4. あとがき

図3. に $a=0.1$ のときの Newman による二次元問題の応力拡大係数 k_1 と三次元問題の場合の K_I を示す。球の半径が小さいとき, K_I は k_1 に比べて小さいが $0.36 \leq b$ では K_I の方が k_1 に比べて大きくなる。

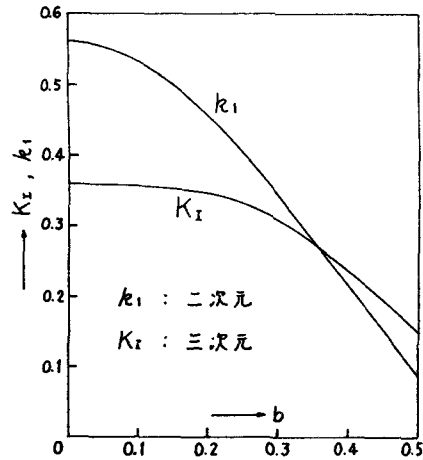


図3. 応力拡大係数の変化 ($a=0.1$)

参考文献

- 1) J. C. Newman : NASA Technical Note, NASA TN D-6376, Aug. 1971