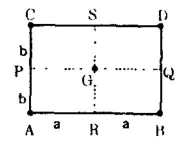
# 偶応力を考慮したFEモデルについて

東北大学工学部　佐武正雄

## 1. まえがき

偶応力を考慮したFEモデルを導入し，偶応力理論[1]による考察や規則的大形構造物のコセラ連続体化への応用などについて述べる。

## 2. 偶応力を考慮したFEモデル




図－1

図－1に示すような2a×2bの長方形要素を考え，重心Gを原点とするlocal座標により次の変位関数を導入する。

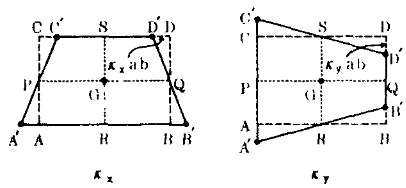
$$\left.\begin{aligned} u_x &= \alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 xy \\ u_y &= \alpha_5+\alpha_6 x+\alpha_7 y+\alpha_8 xy \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

節点変位は

$$\{u\}=\{u_{xA}, u_{yA}, u_{xB}, u_{yB} \cdots\cdots u_{xD}, u_{yD}\}^T=[A]\{\alpha\} \qquad (2.2)$$

ここに

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$




図－2

で与えられる。ここで

$$u_{xG}=\alpha_1, \quad u_{yG}=\alpha_5, \quad w=\tfrac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_6) \qquad (2.4)$$

$$\varepsilon_x=\alpha_2, \quad \varepsilon_y=\alpha_7, \quad \gamma=\alpha_3+\alpha_6 \qquad (2.5)$$

$$\kappa_x=\frac{\partial^2}{\partial_x\partial_y}u_x=-\alpha_4, \quad \kappa_y=-\frac{\partial^2}{\partial_x\partial_y}u_y=-\alpha_8 \qquad (2.6)$$

とおけば，それぞれ

$\{u_{xG}, u_{yG}\}^T$ ……… G点の変位(要素の剛体変位)，　$w$ ………PQRSの回転(要素の剛体回転)

$\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$ ………PQRSの歪，　$\{\kappa_x, \kappa_y\}^T$ ………ABCDの曲率(図－2)

を示す。ここで要素の歪として，5成分からなるベクトル

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \kappa_x, \kappa_y\}^T=[B]\{\alpha\} \qquad (2.7)$$

を導入する。ここに

$$[B]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

また，$\{\varepsilon\}$に抵抗する要素の応力として

$$\{\sigma\}=\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \mu_x, \mu_y\}^T \qquad (2.9)$$

を導入する。ここに$\{\mu_x, \mu_y\}^T$は偶応力である。弾性法則は

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \qquad (2.10)$$

と記され，一般に

$$
[D]=\begin{bmatrix} D_x & D_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ D_{xy} & D_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4B_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4B_y \end{bmatrix} \qquad (2.11)
$$

とおくことができる。通常の偶応力理論では $B_x=B_y=B$ として異方性を考慮しないが，ここでは長方形要素を用いているので異方性を考慮している。

仮想仕事の原理を用いれば，このFEモデルに対するスティフネスマトリックスは

$$
[S]=[A^{-1}]^T[C][A^{-1}] \qquad (2.12)
$$

$$
[C]=4ab[B]^T[D][B] \qquad (2.13)
$$

から求められる。[A],[B],[D] はそれぞれ式 (2.3),(2.8),(2.11) で与えられる。

## 3. 考察

(1) 特性長

$$
\ell_x=\sqrt{\frac{B_x}{G}}\ , \qquad \ell_y=\sqrt{\frac{B_y}{G}} \qquad (3.1)
$$

は，偶応力理論において（異方性を考慮した）特性長と呼ばれるものである。図ー1の長方形要素に式 (2.1)の変位関数を与え，通常のFEMにより弾性係数E，$\nu$ の isotropic な弾性体について式 (2.12)中の [C] を求め，同一の結果となるように式 (2.11)の中の弾性係数を逆算すれば，

$$
D_x=D_y=\frac{E}{1-\nu^2}\ , \qquad D_{xy}=\frac{\nu}{1-\nu^2}E\ , \qquad G=\frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (3.2)
$$

$$
\ell_x=\sqrt{\frac{1}{12}\left(a^2+\frac{2}{1-\nu}b^2\right)}\ , \qquad \ell_y=\sqrt{\frac{1}{12}\left(\frac{2}{1-\nu}a^2+b^2\right)} \qquad (3.3)
$$

を得る。ここで，特性長に要素の寸法があらわれているのは興味深い。

(2) 大形構造物の連続体化への応用

トラスやラーメンで規則的に構成された2次元大形構造物を偶応力を考慮した連続体（コセラ連続体）として取りあつかい解析を容易にすることが考えられている[2)]が，この場合に，このFEモデルを応用することができる。計算の手順は次のとおりである。構造内の一つの単位長方形エレメント（2a×2b)をとり式 (2.2)の変形を与え，この変形に対応する歪エネルギーUを求めれば，Uは一般に

$$
U=\frac{1}{2}\{\alpha\}^T[C]\{\alpha\} \qquad (3.4)
$$

の形で与えられる。式 (3.4)で求められた [C] を式 (2.13) の [C] と等値することにより，等価なコセラ連続体の弾性係数を決定することができる。

## 4. あとがき

偶応力を考慮したFEモデルを導入することにより，要素の剛性についての自由度をますことができ，実用上広い応用を考えることができる。このモデルについて，さらにいくつかの修正も考えられ，検討中である。

### 参考文献

1) R.D.Mindlin ; Influence of Couple-stresses in Stress Concentrations, Experimental Mechanics (Jan.1963), p.1−7

2) 金谷健一 ; 大規模構造物の連続体力学，第26回応用力学連合講演会講演論文抄録集 (1976),p217−218