剛性マトリックスによる支点下降応力解析

岩手大　学生員　○小嶋初徳
同　　正員　　宮本裕

連続桁においてある支点が沈降した場合，またある支点を強制的に下降させた場合，桁は変形し応力が生じる．従来このような場合の解析法としては三連モーメントによる方法，仕事の式を用いた応力法などが使われてきた．しかしこれらの方法では多径間の連続桁において数個の支点が不規則に下降した場合，また変断面を有する場合に複雑な計算となりはなはだ困難である．

一方，剛性マトリックスによる方法は変位を未知とし外力を既知として計算するものであるが，この剛性マトリックスを使って支点下降問題解析，すなわち変位を既知として解くことができる．この方法の利点はコンピューターを利用することにより変断面を有する多径間のどのような支点下降問題も容易に解析できることにある．

Fig.1のような3径間連続桁を考え，支点CがΔだけ下降した場合を三連モーメントによる方法，仕事の式による応力法，剛性マトリックスによる方法の3つの方法で解析してみる．

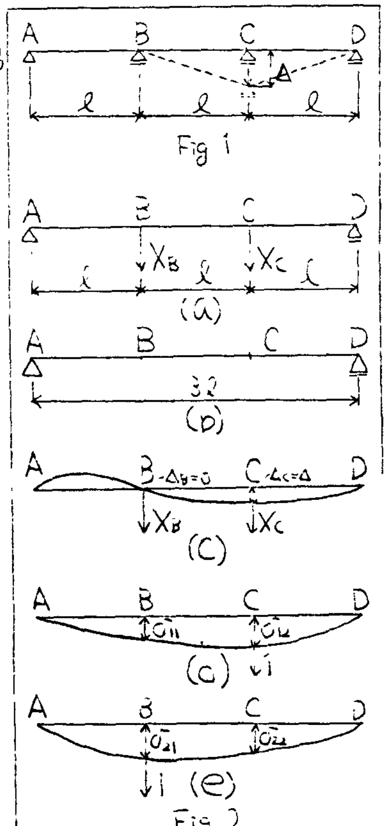


Fig.2

（三連モーメントの式による方法）

Fig 1に三連モーメントの式を適用すると，

$$m_A M_{AB}+2(m_A+1)M_{BC}+M_{CD} = -2(m_A H_{BA}+H_{BC})+6EK_{BC}(R_{AB}-R_{BC})$$

$$m_B M_{BC}+2(m_B+1)M_{CD}+M_D = -2(m_B H_{CB}+H_{CD})+6EK_{CD}(R_{BC}-R_{CD})$$

となる．ここで，

$$M_{AB}=M_D=0,\ K_{BC}=K_{CD}=\frac{I}{\ell},\ m_A=\frac{K_{BC}}{K_{AB}}=1,\ m_B=\frac{K_{CD}}{K_{BC}}=1$$

$$R_{AB}=0,\ R_{BA}=\frac{\Delta}{\ell},\ R_{CD}=-\frac{\Delta}{\ell}$$

であるから三連モーメントの式は整理すると，

$$4M_{BC}+M_{CD}=-\frac{6EI}{\ell^2}\Delta$$

$$M_{BC}+4M_{CD}=\frac{12EI}{\ell^2}\Delta$$

となる．この2つの式からM_{BC}, M_{CD}を求める．

$$M_{BC}=-\frac{12EI}{5\ell^2}\Delta\ ,\quad M_{CD}=\frac{18EI}{\ell^2}\Delta$$

（応力法）

Fig 2-(a)のように不静定力として支点Bの垂直反力X_Bと支点Cの垂直反力X_Cを選ぶことにする．Fig. 2-(b)のように基本系としてX_BもX_Cも働かない支間3ℓの単純桁を考える．この基本系単純桁にFig.2-(c)のようにX_B, X_Cをあらためて作用させると変形する．点Bのところの垂直変位を$\Delta_B(=0)$，点Cのところの垂直変位を$\Delta_C(=\Delta)$とする．次にFig.2-(b)の基本系にFig 2-(d),(e)のように点B，および点CのところにX_B, X_Cと同じ方向に単位垂直力1を作用させると変形する．そこでFig.2-(c),(d),(e)とに

対して相反法則を適用させると次のようになる.

$$X_B\,\delta_{11}+X_C\,\delta_{12}=1\cdot\Delta_C \qquad X_B\cdot\delta_{21}+X_C\,\delta_{22}=1\cdot\Delta_B$$

$$\left(\text{ここで } \delta_{11}=\delta_{22},\ \delta_{12}=\delta_{21},\ \ \Delta_B=0,\ \Delta_C=\Delta \text{ であるから}\right)$$

$$X_B\,\delta_{11}+X_C\,\delta_{12}=\Delta \qquad X_C\,\delta_{12}+X_C\,\delta_{11}=0$$

$$\delta_{11}=\frac{7\ell^3}{18EI},\quad \delta_{12}=\frac{8\ell^3}{18EI} \text{ であるから}$$

$$X_B=\frac{-\delta_{11}}{\delta_{12}^2-\delta_{11}^2}\Delta=-\frac{42EI}{5\ell^3}\cdot\Delta,\qquad X_C=\frac{\delta_{12}}{\delta_{12}^2-\delta_{11}^2}\cdot\Delta=\frac{48EI}{5\ell^3}\cdot\Delta$$

X_B, X_C より支点A, Dの反力 R_A, R_D, および支点B, Cの曲げモーメント M_B, M_C を求める.

$$R_A=\frac{12EI}{5\ell^3}\cdot\Delta,\quad R_D=-\frac{18EI}{5\ell^3}\Delta\ (\text{下向きを正}) \qquad M_B=-\frac{12EI}{5\ell^2}\Delta,\quad M_C=\frac{18EI}{5\ell^2}\Delta$$

(剛性マトリックスによる方法)

Fig 1において AB要素, BC要素, CD要素を考える. 各要素の剛性マトリックスは次のようになる.

AB要素

$$\begin{Bmatrix}Q_A\\M_A\\Q_B\\M_B\end{Bmatrix}=EI\begin{bmatrix}12/\ell^3 & -6/\ell^2 & -12/\ell^3 & -6/\ell^2\\ & 4/\ell & 6/\ell^2 & 2/\ell\\ & & 12/\ell^3 & 6/\ell^2\\ \text{Sym.} & & & 4/\ell\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_A\\y'_A\\y_B\\y'_B\end{Bmatrix},$$

BC要素

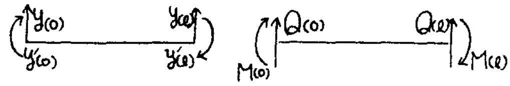
$$\begin{Bmatrix}Q_B\\M_B\\Q_C\\M_C\end{Bmatrix}=EI\begin{bmatrix}12/\ell^3 & -6/\ell^2 & -12/\ell^3 & -6/\ell^2\\ & 4/\ell & 6/\ell^2 & 2/\ell\\ & & 12/\ell^3 & 6/\ell^2\\ \text{Sym.} & & & 4/\ell\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_B\\y'_B\\y_C\\y'_C\end{Bmatrix},$$

CD要素

$$\begin{Bmatrix}Q_C\\M_C\\Q_D\\M_D\end{Bmatrix}=EI\begin{bmatrix}12/\ell^3 & -6/\ell^2 & -12/\ell^3 & -6/\ell^2\\ & 4/\ell & 6/\ell^2 & 2/\ell\\ & & 12/\ell^3 & 6/\ell^2\\ \text{Sym.} & & & 4/\ell\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_C\\y'_C\\y_D\\y'_D\end{Bmatrix}$$

全体の剛性マトリックス

$$\begin{Bmatrix}\sum Q_A\\ \sum M_A\\ \sum Q_B\\ \sum M_B\\ \sum Q_C\\ \sum M_C\\ \sum Q_D\\ \sum M_D\end{Bmatrix}=EI\begin{bmatrix}12/\ell^3 & -6/\ell^2 & -12/\ell^3 & -6/\ell^2 & & & & \\ -6/\ell^2 & 4/\ell & 6/\ell^2 & 2/\ell & & & 0 & \\ -12/\ell^3 & 6/\ell^2 & 24/\ell^3 & 0 & -12/\ell^3 & -6/\ell^2 & & \\ -6/\ell^2 & 2/\ell & 0 & 8/\ell & 6/\ell^2 & 2/\ell & & \\ & & -12/\ell^3 & 6/\ell^2 & 24/\ell^3 & 0 & -12/\ell^3 & -6/\ell^2\\ & & -6/\ell^2 & 2/\ell & 0 & 8/\ell & 6/\ell^2 & 2/\ell\\ & 0 & & & -12/\ell^3 & 6/\ell^2 & 12/\ell^3 & 6/\ell^2\\ & & & & -6/\ell^2 & 2/\ell & 6/\ell^2 & 4/\ell\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_A\\y'_A\\y_B\\y'_B\\y_C\\y'_C\\y_D\\y'_D\end{Bmatrix},$$



左式において, $y_A=y_B=y_D=0,\ y_C=-\Delta$

$\sum M_A=\sum M_B=\sum M_C=\sum M_D=0$ より,

$$\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}=EI\begin{bmatrix}4/\ell & 2/\ell & \boxed{0} & 0 & 0\\ 2/\ell & 8/\ell & \boxed{6/\ell^2} & 2/\ell & 0\\ 0 & 2/\ell & \boxed{0} & 8/\ell & 2/\ell\\ 0 & 0 & \boxed{-6/\ell^2} & 2/\ell & 4/\ell\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y'_A\\y'_B\\y_C=-\Delta\\y'_C\\y'_D\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}0\\6/\ell^2\\0\\-6/\ell^2\end{Bmatrix}EI\cdot\Delta=EI\begin{bmatrix}4/\ell & 2/\ell & 0 & 0\\ 2/\ell & 8/\ell & 2/\ell & 0\\ 0 & 2/\ell & 8/\ell & 2/\ell\\ 0 & 0 & 2/\ell & 4/\ell\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y'_A\\y'_B\\y'_C\\y'_D\end{Bmatrix},\qquad \begin{Bmatrix}y'_A\\y'_B\\y'_C\\y'_D\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}4/\ell & 2/\ell & 0 & 0\\ 2/\ell & 8/\ell & 2/\ell & 0\\ 0 & 2/\ell & 8/\ell & 2/\ell\\ 0 & 0 & 2/\ell & 4/\ell\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}0\\6/\ell^2\\0\\-6/\ell^2\end{Bmatrix}\Delta=\begin{Bmatrix}-3/5\ell\\4/5\ell\\1/5\ell\\-8/5\ell\end{Bmatrix}\Delta$$

各要素の剛性マトリックスに求まった未知節点変位を代入することにより節点に生じる力は求められる。ここでは 節点B, およびCに生じる曲げモーメントM_B およびM_Cを求めることにする。

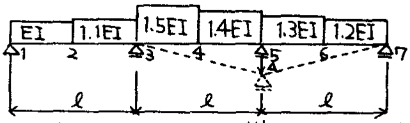
$$M_B=-\frac{6}{\ell^2}\cdot y_B+\frac{4}{\ell}y'_B+\frac{6}{\ell^2}y_C+\frac{2}{\ell}y'_C=-\frac{12EI}{5\ell^2}\cdot\Delta\ (\text{要素左端, 時計回り})$$

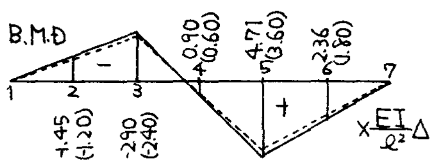
$$M_C=-\frac{6}{\ell^2}y_B+\frac{2}{\ell}y'_B+\frac{6}{\ell^2}y_C+\frac{4}{\ell}y'_C=-\frac{18EI}{5\ell^2}\cdot\Delta\ (\text{要素右端, 時計回り})$$

よって

$$M_B=-\frac{12EI}{5\ell^2}\Delta \qquad M_C=\frac{18EI}{5\ell^2}\Delta$$

(剛性マトリックス法による計算例)





(実線および( )の値は 等断面EIの場合を示す)

参考文献 酒井忠明著, 構造力学; 技報堂