

秋田大学 土木工学科 学生員 ○ 長谷部 薫
秋田大学 土木工学科 正 員 篠 農 知 徳
秋田大学 土木工学科 正 員 薄 木 征 三

1. まえがき 著者らは先に薄肉曲線材のせん断変形を考慮したひずみ場を明示して、仮想仕事の原理によって微分方程式と境界条件を求めた¹⁾。薄肉曲線材の理論における特別な場合、曲率面内変位と曲率面外変位が分離して夫々独立に解析できる。一般的な曲線けたはこの曲率面外変位に関する方程式を用いて解析されており、ここでもこれを用いて曲線けたの断面内応力分布を解析する。せん断変形を考慮した薄肉曲線材の理論は従来の曲げねじれ理論を第一段階では踏襲してひずみ場を求め、このひずみ成分から得られる応力を用いて応力の釣合い式を満足するようにひずみ場を修正するものであり、この時新しくせん断ひずみを独立変数に導入している。これは断面不変の仮定をあくまでも保持した上でせん断変形を考慮しようとするので、いわゆる逐次近似理論であるがこれまでの研究^{1) 2)}から第2近似解で十分に収束していることが確認されている。

2. せん断変形を考慮した薄肉曲線材の理論の概要 ここでは断面内応力分布の解析に係わるもののみを示す。変位とひずみの関係は $\varepsilon_r = \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}$, $\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} - \bar{v})$, $\varepsilon_z = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$, $\gamma_{r\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\bar{w}}{r})$, $\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$, $\gamma_{rz} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$ ---- (1) a-f 断面不変の仮定により

$\bar{u} = u - y\varphi$, $\bar{v} = v + x\varphi$ ---- (2) a, b 曲線座標 (s, n, θ) を用いたせん断ひずみ成分は、
 $\gamma_s = \frac{R_D}{r} \left[\frac{r^2}{R_D} \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\bar{w}}{r}) + v' \frac{r^2}{R_D} \frac{\partial}{\partial s}(\frac{y}{r}) + u' \frac{r^2}{R_D} \frac{\partial}{\partial s}(\frac{x}{r}) + r_s \psi \right]$ ---- (3) $\gamma_n = \frac{R_D}{r} \left[\frac{r^2}{R_D} \frac{\partial}{\partial n}(\frac{\bar{w}}{r}) + v' \frac{r^2}{R_D} \frac{\partial}{\partial n}(\frac{y}{r}) + u' \frac{r^2}{R_D} \frac{\partial}{\partial n}(\frac{x}{r}) + r_n \psi \right]$ ---- (4) ここで ()' = $\frac{\partial}{R_D \partial \theta}$, 薄肉要素の板厚中心面に垂直で部材軸線に平行な面内でのせん断ひずみは無視する事ができるので $\gamma_n = 0$ として式 (4) を n について積分すると、

$\frac{R_D}{r} \bar{w} = R_D \frac{\bar{w}^*}{r^*} - v' R_D (\frac{y}{r} - \frac{y^*}{r^*}) - u' R_D (\frac{x}{r} - \frac{x^*}{r^*}) - \frac{R_D^2}{r^*} r_n \psi$ ---- (5) ここで ()^{*} は n=0、すなわち板厚中心面上の値を表わす。一方薄肉微小要素の応力の釣合い式は $-\frac{\partial}{\partial s}(\frac{r^*}{R_D^2} \tau_s^* t) + \frac{r^*}{R_D} \frac{\partial}{R_D \partial \theta}(\sigma_\theta^* t) + \frac{r^*}{R_D^2} \int_{-t/2}^{t/2} p_\theta d\eta = 0$ ---- (6)。式 (6) における σ_θ^* は未知であり従来の理論では σ_θ^* を零として解析している。ここでも第一段階では零とおいて軸方向変位を求める。第1近似値として添字 1 を付し

$\bar{w}_1 = w_1 - x\phi_{y1} - y\phi_{x1} - \omega\psi_1$ ---- (7)。故に直応力 σ_θ は、 $\sigma_\theta = E \frac{R_D}{r} [\varepsilon_{z1} - x\kappa_{y1} - y\kappa_{x1} - \omega\varphi_1]$ ---- (8)。式 (8) の直応力 σ_θ を式 (6) に代入して応力の釣合い式を満足べく修正を行い、以下同様な手順を繰り返すことにより第2近似解の軸方向変位 $\bar{w}_2$ が求められる

$\bar{w}_2 = w_2 - x\phi_{y2} - y\phi_{x2} - \omega\psi_2 - \frac{E}{G} \frac{r}{R_D} (B_f \varepsilon'_{z1} - B_x \kappa'_{y1} - B_y \kappa'_{x1} - B_w \varphi'_1)$ ---- (9)

従って補正されたひずみ成分は次のように表わされる。 $\gamma_s = \theta \psi + \frac{E}{G t} \frac{R_D r}{r^*} (S_x \bar{r}'_y + S_y \bar{r}'_x + S_w \Phi_\theta)$ ---- (10), $\varepsilon_\theta = \frac{R_D}{r} (\varepsilon_z - x\kappa_y - y\kappa_x - \omega\varphi) + \frac{E}{G} (B_x \bar{r}'_y + B_y \bar{r}'_x + B_w \Phi_\theta)$ ---- (11)

ここに、 $\varepsilon_z = w' - \frac{v}{R_D}$, $\kappa_x = v' + \frac{w}{R_D}$, $\kappa_y = u' + \frac{\varphi}{R_D}$, $\varphi = \psi'$, $\phi_x = v' + \frac{w}{R_D}$, $\phi_y = u'$, $\psi = \varphi' - \frac{u}{R_D}$, $\bar{r}_x = \kappa'_{x1}$, $\bar{r}_y = \kappa'_{y1}$, $\Phi_\theta = \varphi'_1$

3. 断面内応力分布の解析 断面力と変位の関係は曲率面外変位に関する応力の合力についてのみを示すと次の様になる。 $M_y = -E J_y \kappa_y + E_g K_{yy} \bar{r}'_y$, $T_s = G J_r \psi$, $M_w = -E J_w \varphi + E_g K_{ww} \Phi'$, $H_y = -E_g K_{yy} \kappa_y + E_{gg} R_{yy} \bar{r}'_y$, $H_w = -E_g K_{ww} \varphi + E_{gg} R_{ww} \Phi'$ ---- (12) a-e

式 (12) から得られる変位を式 (11) から得られる直応力に代入すると、断面内直応力分布 σ_θ が次の様に求められる。

$$\sigma_\theta = \eta_y \left\{ \frac{R_D}{\rho} x - B_x \frac{K_{yy}}{R_{yy}} \right\} \frac{M_y}{J_y} + \eta_w \left\{ \frac{R_D}{\rho} \omega - B_w \frac{K_{ww}}{R_{ww}} \right\} \frac{M_w}{J_w} - \eta_y \left\{ \frac{K_{yy}}{J_y} \frac{R_D}{\rho} x - B_x \right\} \frac{G}{E} \frac{H_y}{R_{yy}} - \eta_w \left\{ \frac{K_{ww}}{J_w} \frac{R_D}{\rho} \omega - B_w \right\} \frac{G}{E} \frac{H_w}{R_{ww}} \quad (13)$$

ここに、 $\eta_y = 1 / (1 - \frac{K_{yy}^2}{J_y R_{yy}})$ 、 $\eta_w = 1 / (1 - \frac{K_{ww}^2}{J_w R_{ww}})$ 、はり理論においては軸方向直応力 σ_θ が実際の応力分布を一番よく表わしているものと考えられるので、せん断応力分布はこの直応力分布と釣合っているものとして求めることにする。

θ 方向の応力の釣合式 (6) に式 (13) を代入して、 s について積分すると、

$$\tau_s^* = \frac{R_D^2}{\rho^2} \frac{q_A}{t} + \tau_\theta^* \quad (14)$$

ここで τ_θ^* は曲げ応力やそり応力の θ 方向の変化に釣合うために生ずるせん断応力であり、次の様になる。

$$\tau_\theta^* = -\frac{1}{t} \frac{R_D^2}{\rho^2} \left[\eta_y \left\{ S_{x0} - \Lambda_{x0} \frac{K_{yy}}{R_{yy}} \right\} \frac{M_y'}{J_y} + \eta_w \left\{ S_{w0} - \Lambda_{w0} \frac{K_{ww}}{R_{ww}} \right\} \frac{M_w'}{J_w} - \eta_y \left\{ \frac{K_{yy}}{J_y} S_{x0} - \Lambda_{x0} \right\} \frac{G}{E} \frac{H_y}{R_{yy}} - \eta_w \left\{ \frac{K_{ww}}{J_w} S_{w0} - \Lambda_{w0} \right\} \frac{G}{E} \frac{H_w}{R_{ww}} \right] - \frac{\bar{q}_\theta}{t} \quad (15)$$

ここに、 $S_{x0} = \int_{s_A}^s x^* t ds$, $S_{w0} = \int_{s_A}^s \omega t ds$, $\Lambda_{x0} = \int_{s_A}^s \frac{\rho^*}{R_D} B_x t ds$, $\Lambda_{w0} = \int_{s_A}^s \frac{\rho^*}{R_D} B_w t ds$, $\bar{q}_\theta = \frac{1}{\rho^2} \int_{s_A}^s \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} p_\theta dndds$, q_A は積分定数であり、不静定せん断流とよばれる。式 (14) を

G で除して式 (3) に代入すると、 $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\tau_s^*}{\rho^*} \right) = \frac{R_D^2}{\rho^*^3} \frac{q_A}{t} + \frac{\tau_\theta^*}{\rho^*} \frac{1}{G} - u \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x^*}{\rho^*} \right) - \frac{R_D}{\rho^*^2} r_s^* \psi$ (16)

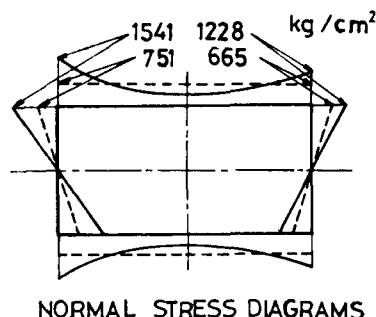
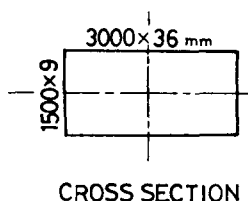
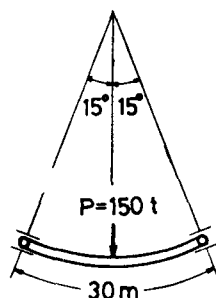
変位の連続条件 $\oint \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\tau_s^*}{\rho^*} \right) ds = 0$ により、 $q_A = \frac{G}{R_D} \psi \oint \frac{r_s^*}{\rho^*^2} ds / \oint \frac{ds}{\rho^*^3 t} - \frac{1}{R_D^2} \oint \frac{\tau_\theta^*}{\rho^*} ds / \oint \frac{ds}{\rho^*^3 t}$ (17)。

式 (16) を式 (5) の s で微分した式に代入し、さらに式 (3) に代入すると、

$\tau_s = \frac{R_D}{\rho} \frac{T_s}{J_T} \oplus - \frac{1}{t} \frac{R_D^2}{\rho^*^3} \left[\eta_y \left\{ S_x - \Lambda_x \frac{K_{yy}}{R_{yy}} \right\} \frac{M_y'}{J_y} + \eta_w \left\{ S_w - \Lambda_w \frac{K_{ww}}{R_{ww}} \right\} \frac{M_w'}{J_w} - \eta_y \left\{ \frac{K_{yy}}{J_y} S_x - \Lambda_x \right\} \frac{G}{E} \frac{H_y}{R_{yy}} - \eta_w \left\{ \frac{K_{ww}}{J_w} S_w - \Lambda_w \right\} \frac{G}{E} \frac{H_w}{R_{ww}} \right] - \frac{\rho}{\rho^*^2} \left\{ \bar{q}_\theta - \frac{1}{t} \oint \frac{\bar{q}_\theta}{\rho^*^3 t} ds / \oint \frac{ds}{\rho^*^3 t} \right\}$ (19)。

ここに、 $S_x = S_{x0} - S_{x1}$, $S_w = S_{w0} - S_{w1}$, $\Lambda_x = \Lambda_{x0} - \Lambda_{x1}$, $\Lambda_w = \Lambda_{w0} - \Lambda_{w1}$, $S_{x1} = \oint \frac{S_{x0}}{\rho^*^3 t} ds / \oint \frac{ds}{\rho^*^3 t}$, $S_{w1} = \oint \frac{S_{w0}}{\rho^*^3 t} ds / \oint \frac{ds}{\rho^*^3 t}$, $\Lambda_{x1} = \oint \frac{\Lambda_{x0}}{\rho^*^3 t} ds / \oint \frac{ds}{\rho^*^3 t}$, $\Lambda_{w1} = \oint \frac{\Lambda_{w0}}{\rho^*^3 t} ds / \oint \frac{ds}{\rho^*^3 t}$ 。

4. 数値計算例



- 1) 長谷部, 篠豊, 薄木: 薄肉曲線材のせん断変形解析, 土木学会第32回年次学術講演会, pp29-30, 1977
- 2) 篠豊, 薄木, 長谷部: 薄肉曲線材のせん断変形解析, 第27回応用力学連合講演会, pp259-260, 1977