非線形粘弾性体の変分原理

東北大学工学部　正員○新関　茂
東北大学工学部　正員　佐武正雄

1) まえがき

連続体の力学的挙動を支配する変分原理の探求は，Euler 以来多くの研究者によって，現在まで続けられている．これらの変分原理の研究は，物体の変形や運動は，エネルギーまたはエントロピーが最大，最小あるいは停留となる方向に生じるという概念に基ずくものである．熱力学的不可逆過程に対し，Prigogin[1]は，エントロピー生成率最小の原理を提案しているが，この原理は非平衡な定常状態に対してのみ成立するものであり，現象論的係数は，Onsagerの相反関係から制約を受けている．したがって，非定常な熱力学的現象を支配する変分原理の研究は，連続体力学の分野に残された非常に重要な問題である．動的非線形粘弾性体に対する変分原理も，これらの分野に属する課題であり，粘弾性は，土，岩石，コンクリートなどにしばしば見うけられる力学的性質である．　本文は，力学的意味を明瞭にするため，内積，Helmholtzの自由エネルギー，Gibbsの仕事関数を用い，動的な非線形粘弾性体の変分原理を構成したものである．また，Vainbergの定理や局所ポテンシャル法を用いた変分原理の構成について，若干の考察を行う．

2) 非線形粘弾性体の基礎方程式

非線形粘弾性体の等温状態における基礎方程式[2]の概要について説明する．連続体が占める3次元空間内の領域をVとし，∂Vは，その境界を表わすものとする．また，位置ベクトル $\underset{\sim}{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ と時間tの関数は，全て，$V\times(-\infty,\infty)$で定義されるものとする．u_iを変位ベクトルとすれば，Greenの歪テンソルは，

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \tag{2.1}$$

σ_{ij}を第2 Piola-Kirchhoffの応力テンソル，$\hat{f}_i$を物体力，ρを密度とすれば，運動方程式は，

$$[\sigma_{ij}(\delta_{kj} + u_{k,j})]_{,i} + \rho\hat{f}_k = \rho\ddot{u}_k \tag{2.2}$$

ここに，$(\dot{\ })$は$\partial/\partial t$を表わすものとする．一般に，履歴性材料においては，時間tにおける応力は，全歪履歴$\gamma^t(s) = \gamma(t-s)$によって決定され，$\mathcal{F}_{ij}$をテンソル値関数とすれば

$$\sigma_{ij} = \mathop{\mathcal{F}_{ij}}_{s=0}^{\infty}[\gamma^t(s)] \tag{2.3}$$

と記すことができる．今，全歪履歴$\gamma^t(s)$　$s\in[0,\infty]$を過去の履歴$\gamma_r^t(s) = \gamma^t(s)$，$s\in(0,\infty]$と現在の歪$\gamma(t) = \gamma^t(0)$とに分割し，Helmholtzの自由エネルギー関数

$$\varphi = \mathop{\Phi}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t;\gamma] \tag{2.4}$$

の存在を仮定する．このとき$\mathop{\Phi}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t(s);\gamma]$が十分に滑らかな関数ならば，式(2.3)は，Helmholtzの自由エネルギー関数(2.4)を用い，

$$\sigma_{ij} = \mathop{\mathcal{F}_{ij}}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t:\gamma] = \rho\partial_\gamma \mathop{\Phi}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t:\gamma] \tag{2.5}$$

と記すことができる．また，同様にエネルギーの内部散逸は

$$\hat{\sigma} = \mathop{\mathcal{D}}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t;\gamma] = \delta_r \mathop{\Phi}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t:\gamma\,|\,\dot{\gamma}_r^t] \tag{2.6}$$

で与えられる．ここに，$\delta_r \mathop{\Phi}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t;\gamma\,|\,\dot{\gamma}_r^t]$は$\dot{\gamma}_r^t$に関し線形なFrechet微分[注]で，$\partial_\gamma$は通常の偏微分である．$\partial V_u$を変位が与えられた境界とすれば，変位に関する境界条件は

$$u_i = \hat{u}_i, \quad \partial V_u\times(-\infty,\infty) \tag{2.7}$$

また，∂V_σを表面力の与えられた境界，n_iを単位法線ベクトルとすれば

$$\sigma_{jk}(\delta_{kj} + u_{k,i})n_j = \hat{t}_i \quad \partial V_\sigma\times(-\infty,\infty) \tag{2.8}$$

と表現できる．

注）

実Banach空間Bの非線形作用素を$\mathcal{P}$とすれば，Frechet微分は

$$\lim_{\|h\|\to 0}\|\mathcal{P}(u+h) - \mathcal{P}(u) - \delta\mathcal{P}(u|h)\| = 0 \tag{A-1}$$

また，後に使用するGateaux微分は

$$\lim_{\alpha\to 0}\left\|\frac{1}{\alpha}[\mathcal{P}(u+h) - \mathcal{P}(u)] - G\mathcal{P}(u|h)\right\| = 0 \tag{A-2}$$

で定義される．ここに，hはBの任意の要素である．$G\mathcal{P}(u|h)$がuの近傍において，連続ならば$G\mathcal{P}(u|h) = \delta\mathcal{P}(u|h)$であり，これらは，容易に

$$\delta\mathcal{P}(u|h) = \frac{\partial}{\partial\alpha}[\mathcal{P}(u+\alpha h) - \mathcal{P}(u)] \tag{A-3}$$

によって与えられる．

3）非線形粘弾性体の変分原理

前節で略述した基礎方程式に基ずいて，動的非線形粘弾性体の変分原理について述べる．

$$\Lambda_1 = {}^t\{\, u_i,\ \sigma_{ij}\ ,\ \gamma_{ij} \,\} \qquad (3.1)$$

とおけば，一般化された動的非線形粘弾性体の変分原理は，汎関数

$$J_I[\Lambda] = \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{v}\Big\{ \frac{\rho}{2}\dot{u}_m\dot{u}_m - \rho \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{G}}}[\gamma_r^t;\gamma] + \hat{\sigma} + \rho\hat{f}_m u_m + \sigma_{ij}\{\gamma_{ij} - \tfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\}\Big\} dv\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{\partial v_\sigma}\hat{t}_i u_i\,ds\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{\partial v_u} t_i(u_i-\hat{u}_i)\,ds\,dt \qquad (3.2)$$

が，力学的平衡点において，停留値をとることであると表現することができる．ここに，付帯条件は式(2.5)である．上式の才1変分をとれば，

$$\delta J_I = \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{v}\Big\{(\rho\ddot{u}_m - [\sigma_{ij}(\delta_{mj}+u_{m,j})]_{,i} - \rho\hat{f}_m)\delta u_m + (\gamma_{ij} - \tfrac{1}{2}[u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}])\delta\sigma_{ij} + (\sigma_{ij} - \rho\partial_\gamma \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{G}}}[\gamma_r^t;\gamma])\delta\gamma_{ij}\Big\} dv\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{\partial v_\sigma}(\hat{t}_i - t_i)\delta u_i\,ds\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{\partial v_u} t_i(u_i-\hat{u}_i)\,ds\,dt \qquad (3.3)$$

となり，Eulerの方程式は，式(2.1),(2.2),(2.5),(2.7),(2.8)である．また，式(2.5),(2.6)を付帯条件とする汎関数は

$$J_R[\Lambda_2] = \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{v}\Big\{\frac{\rho}{2}\dot{u}_m\dot{u}_m - \rho\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{F}}}[\gamma_r^t,\gamma] + \hat{\sigma} + \rho\hat{f}_m u_m - \tfrac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\Big\} dv\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{\partial v_\sigma}\hat{t}_i u_i\,ds\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{\partial v_u} t_i(u_i-\hat{u}_i)\,ds\,dt, \qquad (3.4)$$

ここに，$\Lambda = {}^t\{u_i,\ \sigma_{ij}\}$ で，$\psi = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{F}}}[\gamma_r^t;\gamma]$ はGibbsの熱力学ポテンシャルである．また，式(2.1),(2.5),(2.6),(2.7)を付帯条件とする汎関数

$$J_P[u_i] = \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{v}\Big\{\frac{\rho}{2}\dot{u}_m\dot{u}_m - \rho\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{G}}}[\gamma_r^t;\gamma] + \hat{\sigma} + \rho\hat{f}_m u_m\Big\} dv\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{\partial v_\sigma}\hat{t}_i u_i\,ds\,dt \qquad (3.5)$$

の才1変分を零とおけば，動的な問題における仮想仕事原理に一致した形式

$$\delta J_P = \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{v}\{\rho\dot{u}_m\delta\dot{u}_m - \sigma_{ij}\delta\gamma_{ij} + \rho\hat{f}_m\delta u_m\} dv\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{\partial v_\sigma}\hat{t}_i\,\delta u_i\,ds\,dt = 0 \qquad (3.6)$$

が得られる．汎関数(3.5)を準静的でかつ微小歪 ε_{ij} の場合に対して，書き換えれば

$$J_P'[u_i] = \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{v}\Big\{\rho\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{G}}}[\gamma_r^t,\gamma] - \hat{\sigma} - \rho\hat{f}_m u_m\Big\} dv\,dt - \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{\partial v_\sigma}\hat{t}_i u_i\,ds\,dt \qquad (3.7)$$

となり，Eulerの方程式は $\delta J_P' = 0$ より

$$\sigma_{ij,j} + \hat{f}_m = 0\ ,\quad \sigma_{ij}n_j = \hat{t}_i \qquad (3.8)$$

である．式(3.8)と内部仕事量の非負値性により，式(3.8)の才2変分は

$$\delta^2 J_P' = \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{v}\delta\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dv\,dt \geq 0 \qquad (3.9)$$

であるから，式(3.8)を満たす関数を u_i^* とすれば，u_i^* の近傍の任意の許容関数 u_i に対して $J_P'[u_i] \geq J_P'[u_i^*]$ であることが容易に示される．

4）変分原理の構成に関する考察

Vainbergの定理[3]によれば，基礎方程式

$$\mathcal{P}(u) = \mathcal{N}(u) - f = 0$$

の非線形作用 $\mathcal{P}$ が，ポテンシャル作用素としての必要十分条件

$$\langle G\mathcal{P}(u|h_1), h_2\rangle = \langle G\mathcal{P}(u|h_2), h_1\rangle$$

を満たす場合，式(4.1)に対応する変分汎関数は

$$J[u] = \int_0^1 \langle \mathcal{P}(u_0 + s(u-u_0)), (u-u_0)\rangle\, ds + J_0 \quad (J_0 = J[u_0])$$

で与えられる．ここに〈，〉は一般の汎関数を示す記号であるが，この汎関数として何を用いるべきかは明らかでない．Oden[4]は結合積を上述の記号で表わし，Grutinの変分原理を非線形連続体に拡張しているが，結合積を用いた変分原理は力学的意味が不明瞭なばかりでなく，極値性を有せず，平衡点では常に停留となる．また局所ポテンシャル法は，不可逆過程を含む自己共役でない基礎方程式に対して応用可能であるが，通常と異なる変分のとり方をするのが特徴的である．

5）あとがき

Hermholtzの自由エネルギーやGibbsの熱力学ポテンシャルを用い，動的非線形粘弾性体の一般化された変分原理を構成した．また，Hamiltonの原理に対応する変分汎関数(3.5)の才1変分を零とおけば，動的問題の仮想仕事原理に一致することおよび微小変形で静的な場合に対する汎関数(3.7)は極値性を有することを示した．また本文で述べた変分原理は有限変形粘塑性材料に対しても拡張可能なものと考えられる．

参考文献　(1) Glansdroff, P. and Prigogin, I.: Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations（邦訳：構造安定性・ゆらぎ——その熱力学的理論，みすず書房，1977），(2) Coleman B.D.: Arch. Rat. Mech. Anal. vol.17, 1964. pp.1–46 (3) Vainberg. M.M.: Variational Methods for the Study of Nonlinear Operator, Halden-Day, 1964 (4) Oden, J.T.: Variational Methods in Engineering (ed. by. C.A. Brebbia and H. Tottenham) Southampton University Press, 1973 pp. 2/1–2/20