# 不均質材料の力学と一般化された連続体力学の対応について

東北大学工学部　正員　岸野佑次

## 1. まえがき

複合材料や粒状体のように微視的な不均質性が無視できないような材料の連続体的力学解析を行なうためには，古典的連続体力学において定義されている力学諸量を一般化した力学モデルを構成する必要があるものと思われる。本文は変形や応力などの力学量の定義について考察することにより，不均質材料に対する力学モデルが，近来理論的研究の進められている一般化された連続体力学[1]のある種のモデルに結びつくことを示したものである。なお，本文で対象とする材料は微視的には不均質であるが，巨視的には等方均質であると考えた。また，式の展開は有限変形を考慮に入れて行なった。

## 2. 変形の平均化

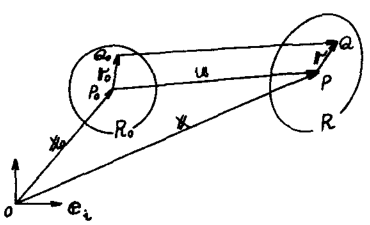


図-1

考えている物体Bの物質点をパラメーター $\xi^\alpha$ ($\alpha=1,2,3$) で表わし，物質点の変形前の位置ベクトルを

$$\mathbf{x}_0 = \underset{\circ}{x}^i \mathbf{e}_i \qquad (1)$$

($\mathbf{e}_i$, $i=1,2,3$, はデカルト座標系における基底ベクトル）で表わせば，次式が成立するものとする。

$$\xi^\alpha = \delta^\alpha_i \underset{\circ}{x}^i \qquad (2)$$

($\delta^\alpha_i$ はクロネッカーのデルタ)

以下，微視的な変動を含む力学量は全てB内の各点における微小な球（半径 $\rho_0$，体積 $v_0$ …一定）をもとに平均化するものとする。点 $P_0$（図-1参照）の変位は上述の球 $R_0$ に含まれる点の変位 $\overset{*}{\mathbf{u}}$ の平均により次式で与えられる。

$$\mathbf{u} = \frac{1}{v_0}\int_{R_0} \overset{*}{\mathbf{u}}\, dv_0 \qquad (3)$$

位置ベクトルが $\mathbf{x}_0+\mathbf{u}$ で表わされる点Pを $P_0$ の変形後の点と考えることとする。また，$R_0$ 内の点 $Q_0$ ($\xi^\alpha+\eta^\alpha$) の変形後の位置ベクトルを $\mathbf{x}_0+\mathbf{u}+\overset{*}{\mathbf{r}}$ で表わせば，ベクトル $\mathbf{r}_0$ ($\overrightarrow{P_0Q_0}$) に対応する変形後のベクトル $\mathbf{r}$ は変形を球面 $\partial R_0$ で最小二乗近似[2]することにより，次式で与えられる。

$$r^i = A^i_\alpha \eta^\alpha \qquad (4)$$

ここに，

$$A^i_\alpha = \frac{1}{v_0}\oint_{\partial R_0} n_\alpha \overset{*}{r}{}^i\, da_0 \qquad (5)$$

は有限変形理論における変形勾配テンソルに相当し，$n_\alpha$ は $\partial R_0$ の外向き単位法線ベクトルを表わす。(5)式において $\overset{*}{\mathbf{r}}$ を $\overset{*}{\mathbf{u}}$ を用いて表わせば，$A^i_\alpha$ は

$$A^i_\alpha = \delta^i_\alpha + \frac{1}{v_0}\oint_{\partial R_0} n_\alpha \overset{*}{u}{}^i\, da_0 \qquad (6)$$

により与えられる。以下 $\overset{*}{u}{}^i$ を微分可能な連続関数とみなす。この場合，

$$\oint_{\partial R_0} n_\alpha \overset{*}{u}{}^i\, da_0 = \int_{R_0} \partial_\alpha \overset{*}{u}{}^i\, dv_0 \qquad (7)$$

が成立し，更に平均化のオペレーター（$\frac{1}{v_0}\int_{R_0} dv_0$）と微分演算子（$\partial_\alpha$）とは可換であると考えられるので，

$$A^i_\alpha = \delta^i_\alpha + \partial_\alpha u^i \qquad (8)$$

が成立つ（$u^i$ は(3)式で定義された変位ベクトル）。

## 3. 内部仕事と応力

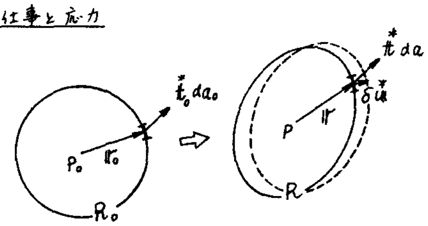


図-2

$\partial R$ の微小面素に作用する応力ベクトルを $\overset{*}{\mathbf{t}}\,da$ とおき，$\overset{*}{\mathbf{t}}$ のラグランジュ表示を $\underset{\circ}{\overset{*}{\mathbf{t}}}$，$da$ に対応する変形前の面素を $da_0$ とおけば，次式が成立する（図-2参照）。

$$\underset{\circ}{\overset{*}{\mathbf{t}}}\, da_0 = \overset{*}{\mathbf{t}}\, da \qquad (9)$$

変位増分を2次の項まで考慮に入れて近似し，

$$\delta \overset{*}{u}_i = \delta u_i + \partial_\alpha \delta u_i \eta^\alpha + \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\beta \delta u_i \eta^\alpha \eta^\beta \quad (10)$$

とおく。$\partial R$ 上での変位増分が上式で表わされるものとすれば，応力が $\partial R$ を介して $R$ に対してなす仕事の単位体積当りの増分は次式で与えられる。

$$\delta w = \left(\frac{1}{v_0}\oint_{\partial R_0} \overset{*}{\underset{0}{t}}{}^i da_0\right)\delta u_i + \left(\frac{1}{v_0}\oint_{\partial R_0} \eta^\alpha \overset{*}{\underset{0}{t}}{}^i da_0\right)\partial_\alpha \delta u_i + \left(\frac{1}{2v_0}\oint_{\partial R_0} \eta^\alpha \eta^\beta \overset{*}{\underset{0}{t}}{}^i da_0\right)\partial_\alpha \partial_\beta \delta u_i \quad (11)$$

簡単のため物体力はないものとすれば，力の平衡条件より (11)式右辺第一項は零である。ここで，

$$\underset{0}{T}{}^{\alpha i} = \frac{1}{v_0}\oint_{\partial R_0} \eta^\alpha \overset{*}{\underset{0}{t}}{}^i da_0 \quad (12)$$

$$\underset{0}{S}{}^{\alpha\beta i} = \frac{1}{v_0}\oint_{\partial R_0} \eta^\alpha \eta^\beta \overset{*}{\underset{0}{t}}{}^i da_0 \quad (13)$$

とおく，力の平衡条件および

$$\oint_{\partial R_0} \eta^\alpha \eta^\beta da_0 = \rho_0 v_0 \delta^{\alpha\beta} \quad (14)$$

を考慮に入れると次式が成立する。

$$\delta_{\alpha\beta} \underset{0}{S}{}^{\alpha\beta i} = 0 \quad (15)$$

また，(13)式より，$\underset{0}{S}{}^{\alpha\beta i}$ は $\alpha$ と $\beta$ に関して対称である。

B内の任意の領域 $\Omega$ に貯えられる内部エネルギー増分 $\delta W$ は (11)式の $\delta w$ の積分により与えられる。ガウスの定理を用いて積分計算を行なえば次式を得る。

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_\Omega \delta w \, dv_0 \\ &= \int_{\partial\Omega} (\underset{0}{\sigma}{}^{\alpha i} \delta u_i + \underset{0}{S}{}^{\alpha\beta i} \partial_\beta \delta u_i) \eta_\alpha da_0 \\ &\quad - \int_\Omega \partial_\alpha \underset{0}{\sigma}{}^{\alpha i} \delta u_i dv_0 \quad (16)\end{aligned}$$

ここに，

$$\underset{0}{\sigma}{}^{\alpha i} = \underset{0}{T}{}^{\alpha i} - \partial_\beta \underset{0}{S}{}^{\alpha\beta i} \quad (17)$$

は エネルギーの対応関係よりラグランジュの応力テンソルとみなすことができる。

(16)式の $\delta u_i$ に剛体変位を与えた場合 $\delta W$ は任意の $\Omega$ に対して零となる必要があることから，平衡条件式

$$\partial_\alpha \underset{0}{\sigma}{}^{\alpha i} = 0 \quad (18)$$

およびモーメントの釣合式

$$\partial_\alpha \mu^\alpha{}_{\cdot k} + \epsilon_{ijk} \underset{0}{\sigma}{}^{\alpha j} A^i_\alpha = 0 \quad (19)$$

($\epsilon_{ijk}$ はエディントンのイプシロン)を得る。ここに

$$\mu^\alpha{}_{\cdot k} = \epsilon_{ijk} \underset{0}{S}{}^{\alpha\beta j} A^i_\beta \quad (20)$$

である。(16)式のエネルギーの対応より明らかなように，$\mu^\alpha{}_{\cdot k}$ は回転歪に抵抗する偶応力とみなすことができる。(18)，(19)式をオイラー表示すると，

$$\partial_i \sigma^{ij} = 0 \quad (21)$$

$$\partial_i \mu^i{}_{\cdot j} + \epsilon_{jkl} \sigma^{kl} = 0 \quad (22)$$

を得る。ここに，$\sigma^{ij}$，$\mu^i{}_{\cdot j}$ は次式で与えられるオイラー量である。

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{J} A^i_\alpha \sigma^{\alpha j} \quad (23)$$

$$\mu^i{}_{\cdot j} = \frac{1}{J} A^i_\alpha \mu^\alpha{}_{\cdot j} \quad (24)$$

ここに，

$$J = \det(A^i_\alpha) \quad (25)$$

## 4. 二次の材料 (Materials of Grade 2)[1] との対応

古典弾性論において，内部エネルギー密度が

$$w = w(A^i_\alpha, \xi^\alpha) \quad (26)$$

で与えられるのに対し，内部エネルギー密度が

$$w = w(A^i_\alpha, \partial_\beta A^i_\alpha, \partial_\gamma \partial_\beta A^i_\alpha, \cdots\cdots, \xi^\alpha) \quad (27)$$

で与えられる材料を Noll は nonsimple material と呼んだ。(27)式において $\partial_\beta A^i_\alpha$ までを考慮に入れたものがいわゆる二次の材料である。前節までに定式化を行なった不均質材料の力学モデルを弾性体と仮定すれば，このモデルが二次の材料となることは明らかである。二次の材料における構成方程式は次式で与えられる。

$$\underset{0}{\sigma}{}^\alpha{}_{\cdot i} = \frac{\partial w}{\partial A^i_\alpha} - \partial_\beta \left(\frac{\partial w}{\partial(\partial_\beta A^i_\alpha)}\right) \quad (28)$$

$$\underset{0}{S}{}^{\alpha\beta}{}_{\cdot\cdot i} = \frac{\partial w}{\partial(\partial_\beta A^i_\alpha)} \quad (29)$$

二次の材料の理論の特殊なものとして，$\underset{0}{S}{}^{\alpha\beta i}$ の中(20)式で定義される $\mu^\alpha{}_{\cdot k}$ のみを考慮に入れたものがいわゆる偶応力理論となる。この理論においては，偶応力の等方成分 $\mu^i{}_{\cdot i} = \frac{1}{J} A^i_\alpha \mu^\alpha{}_{\cdot i}$ の不定性が問題となっているが，本文で定式化された不均質材料の力学モデルでは $\mu^\alpha{}_{\cdot i}$ の定義より必然的に

$$\mu^i{}_{\cdot i} = 0 \quad (30)$$

となり，上述の問題は解消されることとなる。

## 5. あとがき

本文では不均質材料の力学モデルの有限変形を考慮に入れた定式化を行ない，いわゆる二次の材料との対応について述べた。二次的な変形や応力の影響は材料が塑性変形を受けるときに顕著に現われると考えられるので，今后更にこれらの考察を進めたい。

## 参考文献


1) Toupin, R. A. : Arch. Rational Mech. Anal., 17, (1964) p 85

2) Kishino, Y. : Theoretical and Applied Mechanics, 25, (1977) p. 271