

せん断変形も考慮した板の振動解析

東北大学工学部 学生員 ○山内 正司
東北大学工学部 正 員 佐武 正雄
東北大学工学部 正 員 新聞 茂

1. はじめに

板の古典理論は, Kirchhoff-Love の仮定に基づいているが, この仮定は 板厚 h と板の代表的な長さ a との比 h/a が大きい場合には成立しない。Kirchhoff-Love の仮定を用いない板の代表的理論として, Reissner 理論がある。この理論では, 曲げ応力はエネルギー的に等価な直線分布に換算されているが, 実際の板内部の曲げ応力は, 直線分布にはならない。近年, Ambartsumyan による提案された, せん断変形も考慮した異方性板の理論では, 板の曲げ応力は三次曲線と近似され, 実際の応力分布に近いものとなっている。また, 板の振動解析は古くから行なわれているが, せん断変形, 回転慣性の影響も考慮した解析は, 余り見うけられないように思われる。本文では Ambartsumyan の板理論に基づいた有限要素モデルによって板の振動解析を行ない, これらの諸効果が, 板の固有振動数に及ぼす影響について考察した。

2. Ambartsumyan の理論に基づいた有限要素モデルの定式化

Ambartsumyan の理論による有限要素モデルの概要について説明する。

Ambartsumyan の板理論は, 次の仮定に基づいている。¹⁾

I 板の中央面に垂直な変位 u_z は, 座標に無関係で, 板厚方向の歪は, $e_z = 0$ と記すことができる。

II せん断応力 τ_{xz} , τ_{yz} は, 次式に従って板の厚さ方向に変化する。

$$\tau_{xz} = f(z) \varphi(x, y) \quad (1)$$

$$\tau_{yz} = f(z) \psi(x, y) \quad (2)$$

φ, ψ は未知関数で, $f(z)$ は今の場合 $f(z) = (h/4 - z^2)/2$ とする。初めに, 剛性マトリックスの誘導について説明する。 $[A], [B]$ を弾性係数マトリックスとして, 仮定 I から応力-歪関係は,

$$\{\sigma\} = [A] \{\epsilon\} + [B] \sigma_z \quad (3)$$

$$\text{ここに, } \{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T \quad (4)$$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}\}^T \quad (5)$$

要素の代表節点 i における変形ベクトル $\{U\}_i$, 等価節点力ベクトル $\{F\}_i$ は次の様に定義する。

$$\{U\}_i = \{\omega_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \xi_{xi}, \xi_{yi}\}^T \quad (6)$$

$$\{F\}_i = \{F_i, M_{xi}, M_{yi}, Q_{xi}, Q_{yi}\}^T \quad (7)$$

また, 矩形要素(図-1参照)を用いるものとし, $\{U\}$ は次の様に仮定する。

$$\{U\} = [P] \{\alpha\} \quad (8)$$

$$\text{ここに, } \{U\} = \{\omega, \xi_x, \xi_y\}^T \quad (9)$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{19}, \alpha_{20}\} \quad (10)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & z^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^2y & xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \quad (11)$$

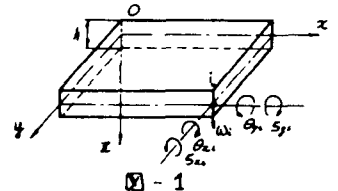


図-1

要素変形ベクトル $\{U\} = \{U_x, U_y, U_z, \xi_x, \xi_y\}$ は, $\{U\}$ を用いて

$$\{U\} = [L] \{u\} \quad (12)$$

$$\text{ここに, } [L]^T = \begin{bmatrix} 1 & -\partial/\partial x & -\partial/\partial y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

と表わすことができる。要素節点変位ベクトル $\{U\}_e$ とすれば, 式(8)は

$$\{U\} = [P][C]^{-1} \{U\}_e \quad (14)$$

と書き換えられる。歪ベクトル $\{\epsilon\}$ は

$$\{\epsilon\} = [G] \{U\} \quad (15)$$

$$\text{ここに, } [G] = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -2h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -2h^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -2h^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ 12J_z \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 12J_z \frac{\partial}{\partial y} & 12f(z) & 0 \\ 0 & 12J_z \frac{\partial}{\partial y} & 12J_z \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 12f(z) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$J_z = \int_0^h f(z) dz$ である。また, σ_z は

$$\sigma_z = [H] \{U\} \quad (17)$$

$$\text{ただし } [H] = \left\{ 0, -12 \frac{J_z}{4h^3} \frac{\partial}{\partial x}, -12 \frac{J_z}{4h^3} \frac{\partial}{\partial y} \right\}^T \quad (18)$$

と表現される。式(3), (14), (15), (17) と, 仮定 I の

原理により, 要素剛性マトリックスは次の様になる。

$$[K]e = ([C]^{-1})^T \left\{ \int_V [P]^T [G] [A] [G] [P] dv \right\} [C]^{-1} + ([C]^{-1})^T \left\{ \int_V [P]^T [H] \{B\}^T [G] [P] dv \right\} [C]^{-1} \quad (19)$$

尚, $[K]e$ の詳細は誘導については文献(2)を参照されたい。

次に、慣性力 $\{p\}$ はダランベールの原理より、

$$\{p\} = -[\bar{P}] \frac{\partial^2 \{\bar{u}\}}{\partial t^2} \quad (20)$$

ここに、 $\bar{P}_{11} = P$, $\bar{P}_{22} = \bar{P}_{33} = \rho h^3/12$, $\bar{P}_{44} = \bar{P}_{55} = 0$ で非対角成分は 0 である。回転慣性を考慮しない場合は $\bar{P}_{22} = \bar{P}_{33} = 0$ である。剛性マトリックスの場合と同様に、仮想仕事の原理と、式(12), (20)を用いると、

質量マトリックスは、次の様になる。

$$[M]e = ([C]^{-1})^T \left\{ \int_V [P]^T [L] [P] [L] [P] dv \right\} [C]^{-1} \quad (21)$$

式(19), (21)より、板全体の剛性マトリックス $[K]$ と、質量マトリックス $[M]$ を組立てれば、振動方程式は次式で与えられる。

$$[K] - \omega^2 [M] = 0 \quad (22)$$

3. 解析結果と考察

解析は、板を 6×4 メッシュに分割し、単純支持板、片持板、固定板について行った。表-1(a)に片持板の解析結果と、Bartonの行った実験値とRitzの方法による解との比較を示す。また、表-1(b)は、固定板の解析結果と、Cheungらによる Finite Layer Methodを用いた三次元解析解と比較したものである。ここに、固有円振動数は全て無次元化され、 $\omega/D/\rho h a^4$ で表わされてある。(以下同様) また、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, A は正方形板の一边の長さである。この表から、本解析結果が、実験値および他の解析解とほぼ一致している事がわかる。次に、図2, 3, 4, にそれぞれ片持板、単純支持板、固定板の $\omega/D/\rho h a^4$ と q/h との関係を示す。せん断変形、回転慣性の効果は、一次モードの場合、固定板で $h/a \approx 1/20$, 片持板で $h/a \approx 1/10$ 位で現われ、板厚比の増加に伴って $\omega/D/\rho h a^4$ は低下する。また高次になるに従ってその低下の度合は著しくなる傾向にある。一応、 Ω_2 は振動数も高める効果を持っている。これは Ω_2 が $C_2 = 0$ なる仮定より得られる応力であり、板の変形を拘束する作用を持っている事と対応している。

4. あとがき

固有振動数に対する、せん断変形、回転慣性、 Ω_2 等の影響は、板厚比と振動次数の相乗効果によって顕著に現われる。またそれは、境界での変形拘束が強い板程著しく、板の振動解析における古典理論の近似性は、固定板、単純支持板の場合、 $h/a \approx 1/20$ 以上、片持板の場合、 $h/a \approx 1/10$ 以上の厚板で失われると考えられる。

参考文献 1) Ambartsyan, S.A. (神谷紀生訳), 異方性板の理論, 森北出版, 1975. 2) 佐式, 新関, 鈴木, 昭和51年度東北工科大学研究発表会講演概要 pp 7-8 3) Barton, M.V., J. Appl. Mech., 18, pp 129-134, 1951. 4) Cheung, Y.K. and Chakrabarti, S., J. Sound and Vibration, 21(3), pp 277-284, 1972

表-1

(a) 片持板 ($h/a = 1/100$)				(b) 固定板 ($h/a = 1/10$)			
モード	実験値 ³⁾	Ritzの方法による解 ³⁾	F.E.M (せん断変形を考慮)	モード	F.L.M ⁴⁾	F.E.M (せん断変形を考慮)	F.E.M (せん断変形・回転慣性を考慮)
1	3.37 (3.43)	3.49	3.47	1	34.5	32.6	32.3
2	8.26 (8.32)	8.55	8.52	2	66.9	65.4	63.9
3	20.55	21.44	21.45	3	94.1	89.5	86.1
4	27.15	27.46	27.05	4	107.3	112.7	107.1

(c) 内は解と実験値

—○— 古典理論
— せん断変形を考慮
—+— せん断変形・回転慣性を考慮
--- せん断変形・回転慣性・ Ω_2 を考慮

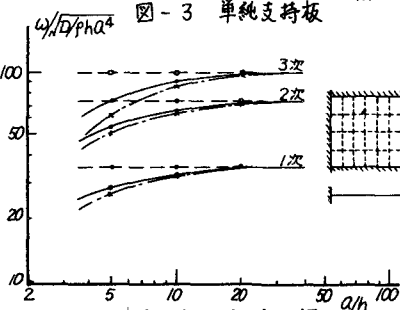
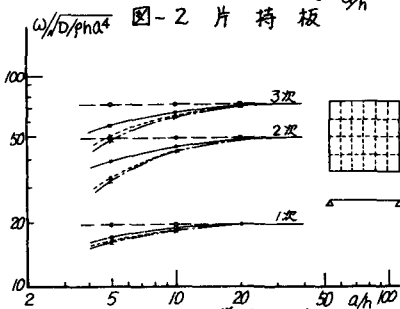
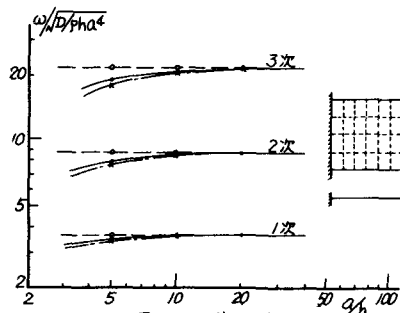


図-4 固定板