

秋田大学 学生員 ○赤石 均
秋田大学 正 員 薄木征三
秋田大学 正 員 藤農知徳

1. まえがき 剛性法による薄肉曲線けた橋の自由振動解析は、けた全体を有限個の直線要素の集合体に理想化し、これら要素の剛性マトリックスと質量マトリックスを導びき、これらの固有値問題をとして解析される。その際、部材軸線の変位を適当な変位関数で近似することが行なわれている。けたが直線の場合、一般には沿直方向変位、水平方向変位およびねじれ角は3次の多項式で、軸方向変位は1次のそれで近似されている。しかしながら、けたが曲率をもつと、軸方向変位は非線形な変化をすることが予想される。したがって曲線けたでは軸方向変位をも3次で近似し再吟味する必要がある。以下には上述の4個の変位関数をすべて3次の多項式で近似した場合の剛性マトリックスと質量マトリックスの誘導を示し、軸方向変位を1次近似した場合と比較し、固有値に及ぼす影響を考察する。

2. 剛性マトリックスと質量マトリックス

(1) 記号と変位関数 図-1のように座標と記号を設定する。原点0は任意点とし、0を貫く軸線を部材軸線とする。軸線*i-j*上の任意点の変位 u_0, v_0, w_0 および φ を次のようにべき級数近似する

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + a_3 \theta^3 \\ v_0 &= b_0 + b_1 \theta + b_2 \theta^2 + b_3 \theta^3 \\ w_0 &= c_0 + c_1 \theta + c_2 \theta^2 + c_3 \theta^3 \\ \varphi &= d_0 + d_1 \theta + d_2 \theta^2 + d_3 \theta^3 \end{aligned} \right\} (1)$$

節点変位として

$$\delta^T = [u_i \ v_i \ w_i \ \phi_{xi} \ \phi_{yi} \ \phi_{zi} \ \psi_{xi} \ \psi_{yi} \ \psi_{zi} \ \epsilon_{xi} \ \epsilon_{yi} \ \epsilon_{zi}]$$

を採用する。 $a_0 \sim d_3$ を節点変位で表わして(2)

再び式(1)に代入すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= N_1 u_i + N_2 \phi_{xi} + N_3 u_j + N_4 \phi_{xj} \\ v_0 &= N_1 v_i + N_2 \phi_{yi} - \frac{N_2}{R} w_i + N_3 v_j + N_4 \phi_{yj} - \frac{N_4}{R} w_j \\ w_0 &= N_1 w_i + \frac{N_2}{R} v_i + N_2 \epsilon_{xi} + N_3 w_j + \frac{N_4}{R} v_j + N_4 \epsilon_{xj} \\ \varphi &= N_1 \phi_{xi} + N_2 \psi_{xi} + \frac{N_2}{R} \phi_{yi} + N_3 \phi_{xi} + N_4 \psi_{xi} + \frac{N_4}{R} \phi_{yi} \end{aligned} \right\} (3)$$

ここで N_i は θ の関数であって次のようである。

また $\phi_x, \phi_y, \psi_x, \psi_y, \epsilon_x, \epsilon_y$ も次に示すようである。

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3\theta^2}{2} + \frac{3\theta^3}{2} & \phi_x &= \frac{1}{R} \left(\frac{dv_0}{d\theta} + w_0 \right) \\ N_2 &= R \left(\theta - \frac{2\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{2} \right) & \phi_y &= \frac{1}{R} \frac{du_0}{d\theta} \\ N_3 &= \frac{3\theta^2}{2} - \frac{2\theta^3}{2} & \psi_x &= \frac{1}{R} \left(\frac{d\phi}{d\theta} - \frac{du_0}{R d\theta} \right) \\ N_4 &= R \left(-\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{2} \right) & \epsilon_x &= \frac{1}{R} \left(\frac{dw_0}{d\theta} - v_0 \right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \dots\dots\dots (4) \\ & \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

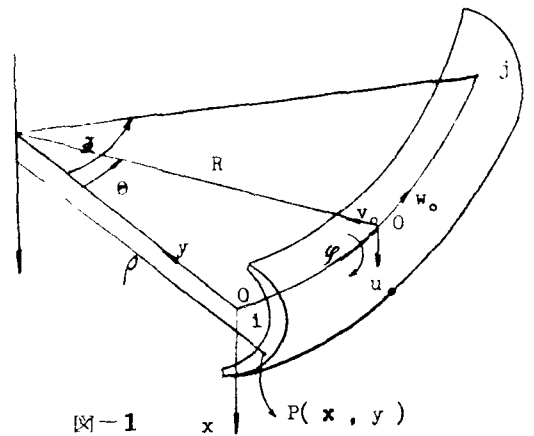


図-1 x | P(x, y)

(2) 仮想仕事の原理 自由振動している薄肉曲線けたの仮想仕事の原理は

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_F (\bar{\sigma}_0 \epsilon_0^* + \bar{\tau}_s \gamma_s^*) dF \rho d\theta \\ & + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_F \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} v^* + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w^* \right) dF \rho d\theta \\ & - \left[\int_F (\bar{\tau}_{x0} u^* + \bar{\tau}_{y0} v^* + \bar{\sigma}_0 w^*) dF \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで Γ/g は部材の単位体積当りの質量、 $\bar{\tau}_{x0}, \bar{\tau}_{y0}, \bar{\sigma}_0$ はけた両端で作用している表面力である。tは時間である。*は仮想変位を表わす。

(3) 剛性マトリックス 式(6)の代1項において、ひずみも節点変位で表わせるから

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = B \cdot \delta, \quad \epsilon^* = \begin{Bmatrix} \epsilon_0^* \\ \gamma_s^* \end{Bmatrix} = B \delta^*$$

ここでマトリックス B は2行8列である。またフックの法則より

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_0 \\ \tau_s \end{Bmatrix} = D \epsilon = D B \delta$$

$$D = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (7)$$

を代入して

$$\int_0^{\pi} \int_F (\delta_0^T \epsilon_0^* + \tau_s^T \gamma_s^*) dF d\theta \rho$$

$$= \delta^{*T} \int_0^{\pi} \int_F (B^T D B dF d\theta \rho) \cdot \delta = \delta^{*T} K \cdot \delta \quad (8)$$

(4) 質量マトリックス 断面内の任意点 $P(x, y)$ の x, y, θ 方向の変位は

$$u = u_0 - y \phi, \quad v = v_0 + x \phi$$

$$w = w_0 - y \phi_x - x \phi_y - \omega \psi_s$$

である。これらに式(3)と(5)を代入する。

すると点 $P(x, y)$ の仮想変位および加速度は

$$\begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix} = L \cdot \delta^*, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = L \cdot \ddot{\delta}$$

となる。 L は3行8列であり θ の関数である。従って式(6)の代2項において

$$\int_0^{\pi} \int_F \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} v^* + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w^* \right) dF d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \delta^{*T} \int_0^{\pi} \int_F L^T L dF d\theta \rho \cdot \delta = \frac{\pi}{2} \delta^{*T} M \cdot \delta \quad (9)$$

3-1 基礎方程式 仮想仕事の式(6)の積分を実行すると次の関係を得る。

$$M \ddot{\delta} + K \delta = P \quad (10)$$

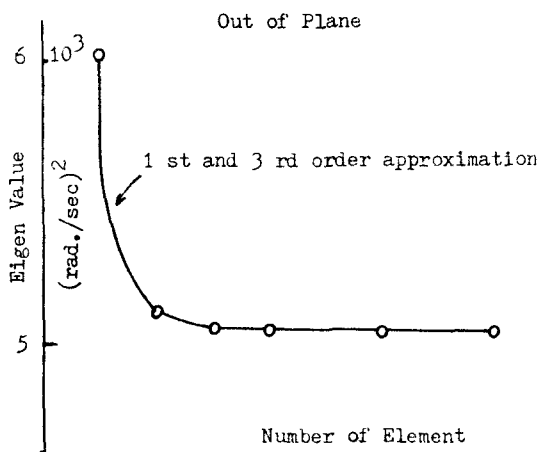


図-3

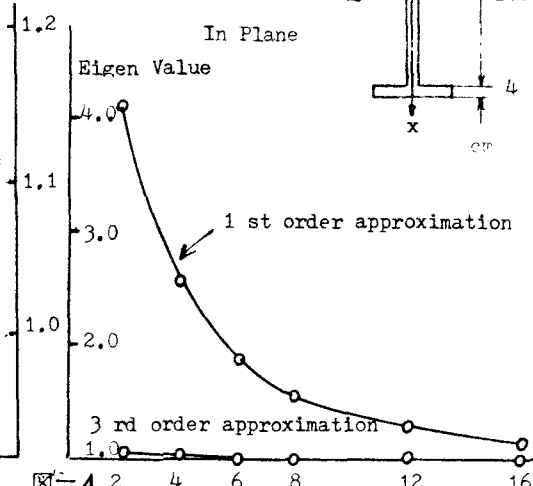


図-4

式(10)を次のように書き換える。

$$\begin{bmatrix} M_{dd} & M_{d\theta} \\ M_{\theta d} & M_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_d \\ \delta_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{dd} & K_{d\theta} \\ K_{\theta d} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_d \\ \delta_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_d \\ P_\theta \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで

$$\delta_d^T = [u_i \phi_i \phi_i \gamma_{si} u_j \phi_{sj} \phi_j \gamma_{sj}]$$

$$\delta_\theta^T = [v_i w_i \phi_{xi} \epsilon_{zi} v_j w_j \phi_{xj} \epsilon_{zj}] \quad (12)$$

である。すると例えば $M_{\theta\theta}$ の対角要素を $\beta(i, i)$ とすると、 w_i の1次近似と3次近似では次のような違いがある。ただし $\beta^1(i, i)$ が1次近似、 $\beta^3(i, i)$ が3次近似。

$$\beta^1(1, 1) = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{13}{35} L A + \frac{6}{5L} I_x \right\}$$

$$\beta^3(1, 1) = \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{13}{35} L + \frac{L^2}{105R^2} \right) A - \left(\frac{2L^2}{105R^2} - \frac{L}{5R} \right) X_x \right.$$

$$\left. + \left(\frac{L^3}{105R^2} + \frac{6}{5L} \right) I_x \right\}$$

$$\beta^1(2, 2) = \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{L^3}{105R^2} + \frac{L}{3} \right) A - \frac{L}{2R} X_x + \frac{3L}{10R^2} I_x \right\}$$

$$\beta^3(2, 2) = \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{L^3}{105R^2} + \frac{13L}{35} \right) A - \frac{19L}{35R} X_x + \frac{32L}{105R^2} I_x \right\} \quad (13)$$

$$I_x = \int_F \frac{\rho}{R} y^2 dF$$

$$\text{ここで } L = R \pi, \quad A = \int_F \frac{\rho}{R} dF, \quad X_x = \int_F \frac{\rho}{R} y dF,$$

4. 数値計算例 図-2のようなI型曲線けたの個有値解析を行う。図-3は曲率 π 外の個有振動数を示したものであり、この場合は軸方向変位は生じないので1次近似と3次近似には差がない。図-4は曲率面内の個有振動数の解析解に対する比を示す。1次近似と3次近似の違いが明瞭に表われる。

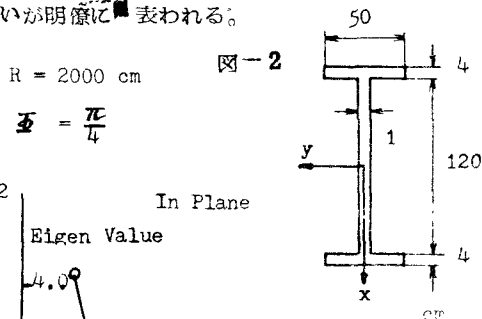


図-2