ラーメンの自由振動に関する一考察

八戸工業大学　正会員○長谷川　明
八戸工業大学　正会員　亀山　和男

ラーメンの固有振動数を求める方法として，静的たわみより運動エネルギーの平均値と位置のエネルギーの平均値が等しいとおくことによって求めるRaileighの方法，あるいは，動力学的3連モーメント定理を使う方法[1]等があるが，ここでは，すでにトラスの固有振動数を求める際に利用したnormal functionを各部材に設け，境界条件式より求める方法[2]をラーメンに適用した。

i) normal functionの設定

ラーメンを構成する各部材のnormal functionを各部材の軸方向，軸と直角方向にそれぞれ次のように設定する。x座標は各部材の軸方向に各々とる。

$$X_i = E_i \sin r_0 x + F_i \cos r_0 x \qquad (1)$$

$$Y_i = A_i \sin r_i x + B_i \cos r_i x + C_i \sinh r_i x + D_i \cosh r_i x \qquad (2)$$

ここで，r_i，r_0は構造物の振動数pと次の関係をもっている。

$$p = \sqrt{\frac{EI_i}{\rho S_i}}\, r_i^2, \qquad p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\, r_0 \qquad (3)$$

E：構造物のヤング率，ρ：構造物の密度，I_i：i部材の断面2次モーメント，S_i：i部材の断面積

ii) 境界条件式

(1)，(2)を使うと各部材の軸力，せん断力，曲げモーメントは次のように表わされる。

$$\text{軸力}\ N_i = ES_i \frac{dX_i}{dx},\quad \text{せん断力}\ Q_i = -EI_i \frac{d^3Y_i}{dx^3},\quad \text{曲げモーメント}\ M_i = -EI_i \frac{d^2Y_i}{dx^2} \qquad (4)$$

今，Fig 1のようにx座標をそれぞれとるとh，i，j，k部材が交わっている点に関し，次のような条件式が得られる。ここで，l_iはi部材の長さ。

1). たわみについて

イ)水平方向

$$X_{h(x=0)} = Y_{i(x=0)} = X_{j(x=l_j)} = Y_{k(x=l_k)} \qquad (5)$$

ロ)鉛直方向

$$Y_{h(x=0)} = -X_{i(x=0)} = Y_{j(x=l_j)} = -X_{k(x=l_k)} \qquad (6)$$

2). たわみ角について

$$\frac{dY_h}{dx}_{(x=0)} = \frac{dY_i}{dx}_{(x=0)} = \frac{dY_j}{dx}_{(x=l_j)} = \frac{dY_k}{dx}_{(x=l_k)} \qquad (7)$$

3). 力のつりあい

イ). 水平方向　$N_{h(x=0)} + Q_{i(x=0)} - N_{j(x=l_j)} - Q_{k(x=l_k)} = 0$ (8)

ロ). 鉛直方向　$-Q_{h(x=0)} + N_{i(x=0)} + Q_{j(x=l_j)} - N_{k(x=l_k)} = 0$ (9)

ハ). モーメント　$M_{h(x=0)} + M_{i(x=0)} - M_{j(x=l_j)} - M_{k(x=l_k)} = 0$ (10)

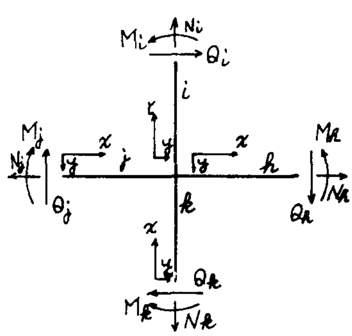


Fig. 1

iii) γ_i, γ_0, A_i〜F_i, の計算

Fig. 2のようなn径間m層ラーメンについてγ_i, γ_0, A_i〜F_iの計算方法を示す。

1). 未知係数A_i〜F_iの数

未知係数A_i〜F_iは，各部材について6個ある。部材数は，柱材が$m(n+1)$で，梁材が$m \cdot n$で合わせて，$m(2n+1)$である。よって，未知係数は$6m(2n+1)$個である。

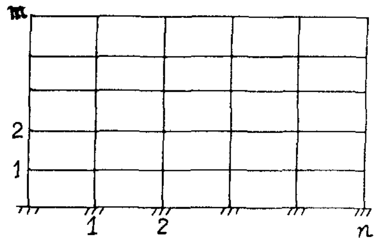


Fig. 2

2). 境界条件式の数

(5)〜(10)で示した境界条件式は，下表のように合計$6m(2n+1)$個である。

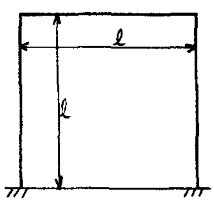
	節点数	1節点当りの条件式の数
十型節点	$(m-1)\cdot(n-1)$	12
丁型節点	$2(m-1)+(n-1)$	9
厂型節点	2	6
𝍫型支点	$n+1$	3

よって(5)〜(10)の境界条件式は，(11)式のようにγ_i,γ_0で表わされるA_{ij}と未知係数A_i〜F_iのベクトルB_iの積となる。

$$\left[A_{ij} \right]\left\{ B_i \right\} = \left\{ 0 \right\} \qquad (11)$$

γ_0, γ_iは，(3)式により1つの未知数にまとめれるので$|A_{ij}|=0$ より，γ_iが求まり，又，A_i〜F_iの比が求まる。

[例]．等断面で正方形を構成する下端固定の門形ラーメンの場合



(11)式におけるA_{ij}は，部材の細長比

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{\frac{I}{S}}}$$

と，(2)式における$X=\gamma l$によって表わされ，この時，(3)式は次のようになる。

$$P=\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}\ \frac{X^2}{l^2}$$

λとXの関係をFig.3に示す。

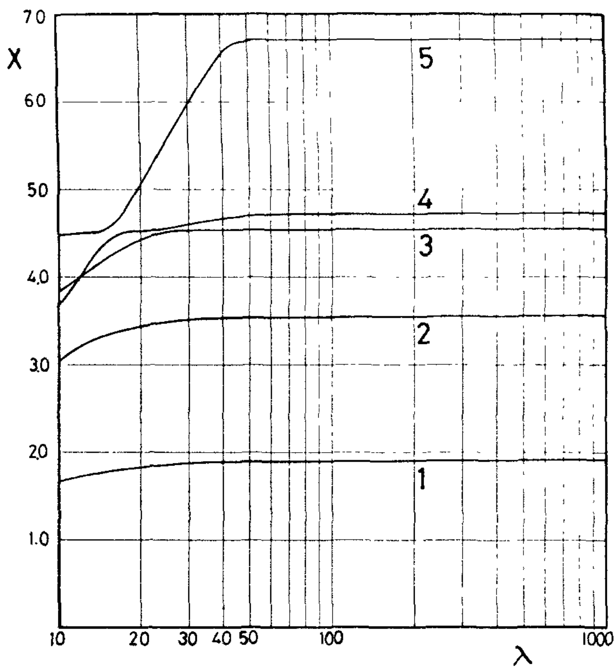


Fig.3

参考文献

(1). 岡本舜三：地震力を考えた構造物設計法

(2). 長谷川・穐山：第32回土木学会講演概要集