

東北大学 正員 多谷 虎男
学生員 福山 和男
学生員 〇鈴木 昭信

要旨. 片持梁における固有曲げ振動を決定する方法として, Lagrange法¹⁾と数値積分法²⁾という二つの異なる方法を用いて, 同じ条件を与え数値計算を行った. 曲げのみの場合には結果はよく一致した. また, 回転慣性を剪断力の影響を考慮した場合についてもかなりの一致を見た.

1. 数値積分法 以下に概略を示す. 梁としてはティモシェンコ梁と呼ばれるものを考え, 剪断力及び回転慣性を考慮した偏微分方程式を無次元化して示す. (単位幅の梁を考える)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k(\frac{\partial u}{\partial x} - \phi), \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \bar{Q} = (-k^2 r^2/12)(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$$

ここで 梁の長さ; l , 座標; $x = x/l$, たわみ; $u = w/l$, 曲げモーメントによるたわみ角; ϕ , $\gamma > \beta$ 率; E , 剪断弾性係数; G , 梁の断面二次モーメント; I , 梁の断面積; A , 剪断係数; μ 梁の高さ; r , $r = r_0/l$, 線密度; γ , $k = \gamma/\mu$, $\beta = r_0/l$, 曲げモーメント; $M = -E I (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$
 $\bar{M} = M/EI$, 剪断力; $Q = \alpha A G (\frac{\partial u}{\partial x} - \phi)$, $\bar{Q} = Q/EI$, μ ; 角振動数

また, 添字(0)は基準点の値であることを示す. また d/dx を $(\cdot)$ と示す.

$u(x,t) = u(x) \cdot e^{i\omega t}$, $\phi(x,t) = \phi(x) \cdot e^{i\omega t}$ として無次元化した運動エネルギー, 歪エネルギーの最大値を等置する. (ここで $\bar{p}^2 = \bar{p}^2 r^2 l^4 / EI$.)

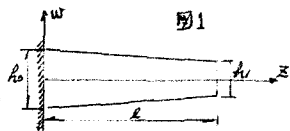
$$\frac{1}{2} \int_0^1 \{ \bar{Q}(u' - \phi) - \bar{M}\phi \} dx = \frac{\bar{p}^2}{2} \int_0^1 k(u^2 + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} / 2) dx$$

$$\text{正規化の条件} \int_0^1 k(u^2 + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} / 2) dx = 1 \text{ より } \bar{p}^2 = \int_0^1 \{ \bar{Q}(u' - \phi) - \bar{M}\phi \} dx$$

$$\text{この右辺を } J(\bar{p}^2) \text{ とおくと, } J = [\bar{Q}u - \bar{M}\phi]_0^1 + \bar{p}^2$$

$$dJ/d\bar{p}^2 = 2 [\bar{Q}(du/d\bar{p}^2) - \bar{M}(d\phi/d\bar{p}^2)]$$

図1に示す片持梁を考える. 無次元化した境界条件 $x=0$; $u=\phi=0$, $x=1$; $\bar{Q}=\bar{M}=0$ をみたすときに $J = \bar{p}^2$, $dJ/d\bar{p}^2 = 0$ となる.



2. 数値計算のモデル $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.29$, $\alpha = 5/6$, 比重 $= 7.85 \text{ 磅/cm}^3$, $l = 30 \text{ cm}$, $r_0 = 1.5 \text{ cm}$
 r を変化させて, $C = (r_0 - r)/r_0$ なる係数を定め直線のテーパとして 下記のCに対し振動数を求めた.

3. 結果 下に表にまとめる.

A) 曲げのみの場合

Lagrange法

Mode \ C	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	11/12
1	(Hz)	141	145	150	153	172	185
2		818	770	718	663	605	581
3		2240	2052	1853	1637	1395	1260

数値積分法

Mode \ C	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	11/12
1	(Hz)	141	145	150	153	172	185
2		818	770	718	663	605	581
3		2240	2052	1853	1637	1395	1260

B) 回転慣性および剪断力の影響を考慮した場合

Lagrange法

Mode \ C	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	11/12
1	(Hz)	138	141	144	150	153	184
2		857	811	764	713	659	578
3		7287	2172	2011	1818	1607	1373

数値積分法

Mode \ C	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	11/12
1	(Hz)	138	141	144	150	153	184
2		852	809	762	712	657	573
3		7183	2180	2006	1819	1614	1380

参考文献 1) T. TAYA; Technology Reports, Tohoku Univ., 39, 2 (1974)

2) H. TAKEKAMA; Technology Reports, Tohoku Univ., 40, 2 (1975)