せん断変形を考慮した単一材の座屈解析

秋田大学土木工学科　正員　稼農 知徳
千葉県庁　正員　宇野 秀信
秋田大学大学院　学生員　○長谷部 薫

1. まえがき　著者らは薄肉断面直線材のせん断変形解析を独自の方法で研究しているが，その主な基本的仮定は (1) 断面は不変である。(2) 断面を構成する板の板厚は薄肉である。(3) 薄肉要素の中心面に垂直で部材軸線に平行な面内でのせん断ひずみは無視する。などである。せん断変形を考慮した理論は2次元あるいは3次元問題として解析されるべきであるが棒理論の範囲内でより精密な解析ができれば大きな意義があると考えられる。そこで上記の仮定のもとで変位場を仮定するための理論展開が行われるがせん断応力とつり合う直応力には修正された直応力が用いられている。(第1次近似値としては零とされる，これは初等はり理論に相当する。) この場合逐次，近似理論が展開されるわけで解が収束しなければならないが，数値計算によると第2次近似で解が収束していることが確かめられている。本論文はこのせん断変形を考慮した理論から得られたひずみ場を用いて，せん断変形を考慮した単一材の曲げ座屈解析を試みたものである。せん断変形を考慮した曲げ座屈に関してはTimoshenkoのその著書[1]に示している。すなわち単一部材の曲げ座屈におけるせん断変形のその座屈限界荷重に与える影響は微小なものになっている。本論文においても，その影響は微小ではあるが，文献1)の式とは異る点があることと，その影響が大きいと推測されるねじれ座屈，横倒れ座屈および骨組の座屈への展開が容易であることなどが本論文の主要な特徴としてあげられる。ここでは単一材の曲げ座屈について座屈を支配する基礎方程式を誘導し，種々な境界条件に対する座屈限界荷重の基本式はすべて類似な式であることを示す。

2. 曲げ座屈を支配する基礎方程式

曲げ座屈を支配する基礎方程式を増分理論による有限変形問題として誘導しよう。変位関数とひずみ成分はせん断変形を考慮した薄肉断面直線材の解析[2]よりさらに，変位の2次の項を考慮して次のように与えられる。

変位関数；

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= u(z), \\ \bar{v} &= 0, \\ \bar{w} &= w(z) - x\,u'(z) + \frac{E}{G} B_y\, U(z) \end{aligned}\right\} \quad (1)_{a\text{-}c}$$

ひずみ成分；

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_z &= \varepsilon_z^L + \varepsilon_z^N, \\ \varepsilon_z^L &= w' - x\,u'' + \frac{E}{G} B_y U', \\ \varepsilon_z^N &= \frac{1}{2}(u')^2, \\ \gamma_{sz} &= \gamma_{sz}^L + \gamma_{sz}^N, \\ \gamma_{sz}^L &= \frac{E}{G}\frac{S_y}{t} U, \quad \gamma_{sz}^N = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)_{a\text{-}f}$$

座屈変形前の変位支配方程式は式(3)で与えられる。

$$\int_{z_1}^{z_2}\int_F \left[\sigma_z^0\,\delta\varepsilon_z^L + \tau_{sz}^0\,\delta\gamma_{sz}^L\right] dF\,dz - \Big[P\cdot\delta w\Big]_{z_1}^{z_2} = 0 \quad (3)$$

式(2)を用いて部分積分を実行した結果より，次のようなつり合い式と境界条件を得る。

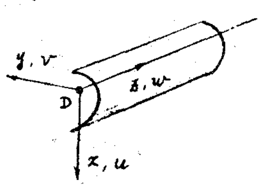


図-1. 座標と変位

つり合い式；

$$\left.\begin{aligned} N_z^{0\prime} &= 0, \\ M_y^{0\prime\prime} &= 0, \\ H_y^{0\prime} - F_z^0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)_{a\text{-}c}$$

境界条件； $z = z_1$ および $z = z_2$ において，

$$\left.\begin{aligned} w &= 0 \quad \text{または，} N_z^0 = P, \\ u &= 0 \quad \text{または，} M_y^{0\prime} = 0, \\ u' &= 0 \quad \text{または，} M_y^0 = 0, \\ U &= 0 \quad \text{または，} H_y^0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)_{a\text{-}d}$$

式(4)の解は，$N_z^0 = P$，$M_y^0 = 0$，$H_y^0 = -F_z^0(l - z)$　(6)a-c

座屈変形後の変位支配方程式は式(7)で与えられる。

$$\int_{z_1}^{z_2}\int_F \left[\sigma_z\cdot\delta\varepsilon_z^L + \tau_{sz}\,\delta\gamma_{sz}^L\right] dF\,dz + \int_{z_1}^{z_2}\int_F \sigma_z^0\cdot\delta\varepsilon_z^N\, dF\,dz = 0 \quad (7)$$

式(2)を用いて部分積分を実行した結果より次のようなつり合い式と境界条件を得る。

文献 1) S.P. TIMOSHENKO, J.M. GERE ; Theory of Elastic Stability, McGRAW-HILL, 1961

つり合い式；

$$\left.\begin{aligned} &N_z'=0\\ &M_y''+(N_z\cdot u')'=0\\ &H_y'-F_z=0 \end{aligned}\right\}\quad (8)_{a-c}$$

境界条件； $z=z_1$ および $z=z_2$ において，

$$\left.\begin{aligned} &w=0 \quad \text{または，} N_z=0\\ &u=0 \quad \text{または，} M_y'+N_z\cdot u'=0\\ &u'=0 \quad \text{または，} M_y=0\\ &U=0 \quad \text{または，} H_y=0 \end{aligned}\right\}\quad (9)_{a-d}$$

以上の方程式において次のように断面力を定義している。

$$N_z=\int_F \sigma_z\,dF = E\int_F \varepsilon_z^L\,dF = EA\,w',$$

$$M_y=\int_F \sigma_z x\,dF = E\int_F \varepsilon_z^L x\,dF = -EJ_y u''+E_g K_y U',$$

$$H_y=\int_F \sigma_z \frac{E}{G}B_y\,dF = E\int_F \varepsilon_z^L \frac{E}{G}B_y\,dF = -E_g K_y u''+E_{gg}R_y U',$$

$$F_z=\int_F \tau_{xz}\frac{E}{G}\frac{S_y}{t}\,dF = G\int_F \gamma_{xz}^L\frac{E}{G}\frac{S_y}{t}\,dF = E_g D_y U \quad (10)_{a-d}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} &\int_F x\,dF=\int_F B_y\,dF=0,\quad A=\int_F dF,\\ &J_y=\int_F x^2\,dF,\quad K_y=\int_F x B_y\,dF,\\ &R_y=\int_F B_y^2\,dF,\quad D_y=\int_F \frac{S_y^2}{t^2}\,dF,\\ &E_g=\frac{E^2}{G},\quad E_{gg}=\frac{E^3}{G^2} \end{aligned}\right\}\quad (11)_{a-h}$$

式(8)に式(10)を代入し式(6)を考慮すると，曲げ座屈を支配する基礎方程式が求められる。

$$\left.\begin{aligned} &EA\,w''=0\\ &-EJ_y u^{IV}+Pu''+E_gK_yU'''=0\\ &-E_gK_yu'''+E_{gg}R_yU''-E_gD_yU=0 \end{aligned}\right\}\quad (12)_{a-c}$$

式(9)の境界条件も次のように変形される。

$z=z_1$ および $z=z_2$ において，

$$\left.\begin{aligned} &w=0 \quad \text{または，} EA\,w'=0\\ &u=0 \quad \text{または，} -EJ_yu'''+Pu'+E_gK_yU''=0\\ &u'=0 \quad \text{または，} -EJ_yu''+E_gK_yU'=0\\ &U=0 \quad \text{または，} -E_gK_yu''+E_{gg}R_yU'=0 \end{aligned}\right\}\quad (13)_{a-d}$$

さらに式$(12)_{b,c}$よりパラメーター$U(z)$を消去して，次の6階常微分方程式を得る。

$$u^{VI}-(k^2-n\alpha)u^{IV}-k^2\alpha u''=0 \quad (14)$$

ここで，$n=\dfrac{1}{1-\dfrac{K_y^2}{J_yR_y}}$，$k^2=\dfrac{G}{E}n\dfrac{D_y}{R_y}$，$\alpha=\dfrac{P}{EJ_y}$

式(13)の境界条件もまた，式(15)となる。

$z=z_1$ および $z=z_2$ において，

$$\left.\begin{aligned} &n\,u^{V}-\{k^2(n-1)-n^2\alpha\}u'''=0 \quad \text{または，}\\ &\qquad u^{IV}+n\alpha u''=0\\ &u=0 \quad \text{または，} u'''+n\alpha u'=0\\ &u'=0 \quad \text{または，} EJ_yu''/n=0 \end{aligned}\right\}\quad (15)_{a-c}$$

3. 基礎微分方程式の一般解

式(14)の一般解は，

$$u=C_0+C_1z+C_2\sin\lambda_s z+C_3\cos\lambda_s z+C_4\sinh\lambda_g z+C_5\cosh\lambda_g z \quad (16)$$

ここで，

$$\lambda_s^2=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(k^2-n\alpha)^2+4k^2\alpha}-(k^2-n\alpha)\right\}$$

$$\lambda_g^2=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(k^2-n\alpha)^2+4k^2\alpha}+(k^2-n\alpha)\right\} \quad (17)_{a,b}$$

4. 中心圧縮材の座屈荷重

式(16)，(17)より式(15)の境界条件を考慮して中心圧縮材の座屈荷重を求めると，

$$P=P_e\frac{1+\dfrac{R_y}{nGD_yJ_y}\cdot P_e}{1+\dfrac{R_y}{GD_yJ_y}\cdot P_e} \quad (18)$$

nが非常に大きいときは，

$$P=\frac{P_e}{1+\dfrac{R_y}{GD_yJ_y}\cdot P_e} \quad (19)$$

ここで，P_e は Euler の座屈荷重で式(20)である。

$$\left.\begin{aligned} &\text{両端回転端材} && P_e=\pi^2EJ_y/l^2\\ &\text{一端回転，他端固定材} && P_e=2.046\pi^2EJ_y/l^2\\ &\text{両端固定材} && P_e=4\pi^2EJ_y/l^2\\ &\text{一端固定，他端自由材} && P_e=0.25\pi^2EJ_y/l^2 \end{aligned}\right\}\quad (20)_{a-d}$$

5. 数値計算 長方形断面の場合について計算例を示す。

$F=ht$，$J_y=h^3t/12$，$K_y=-h^5t/120$，$D_y=h^5t/120$，$R_y=17h^7t/(120\times168)$，$n=85$，$\kappa=6/5$。

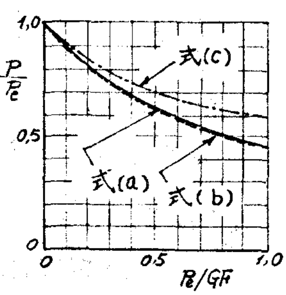
式(18)より，

$$\frac{P}{P_e}=\frac{1+0.0143P_e/GF}{1+1.2143P_e/GF} \quad (a)$$

文献1)で示された座屈荷重

$$\frac{P}{P_e}=\frac{1}{1+\kappa P_e/GF} \quad (b)$$

$$\frac{P}{P_e}=\frac{\sqrt{1+4\kappa P_e/GF}-1}{2\kappa P_e/GF} \quad (c)$$



I-形断面の場合は当日発表する。　図-2

文献 2) 堀江・猪瀬；薄肉直線材のせん断変形解析，土木学会第31回年次学術講演会講演概要，第I部，1976