剛性マトリックス法による格子桁の座屈解析

岩手大学工学部　正員　宮本 裕

1. まえがき

カステリアノの定理により誘導した剛性マトリックスを用いて，格子桁の座屈固有値を求めたものである。

2. 解析の理論

図-1 のような桁のひずみエネルギーは式(1) のようになる。

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l (EI_x v_0''^2+GJ\theta'^2)\,dz+\int_0^l P\left\{\frac{1}{2}v_0'^2+\frac{1}{2}r_s^2\theta'^2\right\}dz \qquad (1)$$

ここで $r_s^2=\frac{1}{F}\int(x^2+y^2)t\,ds=\frac{1}{A}(I_x+I_y)$ (2)

これに対して変位関数を

$$\left.\begin{aligned} v_0(z)&=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3\\ \theta(z)&=b_0+b_1z\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

と仮定すると たわみ角

$$\left.\begin{aligned} \beta(z)&=v_0'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2\\ \text{また}\quad v_0''(z)&=2a_2+6a_3z\\ \theta'(z)&=b_1\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

式(3)と式(4)に境界条件 $z=0$ のとき $v_0(0),\beta(0),\theta(0)$，$z=l$ のとき $v_0(l),\beta(l),\theta(l)$ を代入すると a_0,a_1,a_2,a_3,b_0,b_1 についての6元連立方程式が得られる。これを解いて式(5)を得る。

$$\left.\begin{aligned} &a_0=v_0(0),\quad a_1=\beta(0),\quad a_2=-\frac{3}{l^2}v_0(0)-\frac{2}{l}\beta(0)+\frac{3}{l^2}v_0(l)-\frac{1}{l}\beta(l),\\ &a_3=\frac{2}{l^3}v_0(0)+\frac{1}{l^2}\beta(0)-\frac{2}{l^3}v_0(l)+\frac{1}{l^2}\beta(l),\quad b_0=\theta(0),\quad b_1=\frac{1}{l}\{-\theta(0)+\theta(l)\}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

式(4)を式(1)に代入すると次のようになる。

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l\{EI_x(2a_2+6a_3z)^2+GJb_1^2\}dz+\int_0^l P\left\{\frac{1}{2}(a_1+2a_2z+3a_3z^2)^2+\frac{1}{2}b_1^2\right\}dz \qquad (6)$$

式(5)を式(6)に代入すると，Uは結局 $v_0(0),\beta(0),\theta(0),v_0(l),\beta(l),\theta(l)$ で表わされるわけである。そうしてできたUの式を変位 $v_0(0),\beta(0),\theta(0),v_0(l),\beta(l),\theta(l)$ でそれぞれ微分すると力 $P_y(0),M_x(0),M_T(0),P_y(l),M_x(l),M_T(l)$ が求められ，結局主桁に関する剛性マトリックスが得られる。

$$\begin{bmatrix}P_y(0)\\M_x(0)\\M_T(0)\\P_y(l)\\M_x(l)\\M_T(l)\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\frac{12EI_x}{l^3} & \frac{6EI_x}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_x}{l^3} & \frac{6EI_x}{l^2} & 0\\
\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{4EI_x}{l} & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{2EI_x}{l} & 0\\
0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l}\\
-\frac{12EI_x}{l^3} & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 & \frac{12EI_x}{l^3} & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0\\
\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{2EI_x}{l} & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{4EI_x}{l} & 0\\
0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ}{l}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}v_0(0)\\\beta(0)\\\theta(0)\\v_0(l)\\\beta(l)\\\theta(l)\end{bmatrix}$$

$$-P\begin{bmatrix}
\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & 0\\
\frac{1}{10} & \frac{2}{15}l & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30}l & 0\\
0 & 0 & r_s^2\frac{1}{l} & 0 & 0 & -r_s^2\frac{1}{l}\\
-\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & 0\\
\frac{1}{10} & -\frac{1}{30}l & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}l & 0\\
0 & 0 & -r_s^2\frac{1}{l} & 0 & 0 & r_s^2\frac{1}{l}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}v_0(0)\\\beta(0)\\\theta(0)\\v_0(l)\\\beta(l)\\\theta(l)\end{bmatrix} \qquad (7)$$

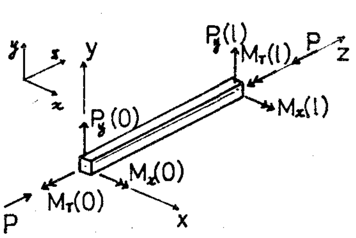

図-1

横桁の剛性マトリックスは主桁の力 P_y, M_x, M_T の順にならべ変えると

$$\begin{Bmatrix} P_y(0) \\ M_x(0) \\ M_T(0) \\ P_y(l) \\ M_x(l) \\ M_T(l) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 \\ \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 \\ \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{2EI_z}{l} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0(0) \\ \beta(0) \\ \theta(0) \\ v_0(l) \\ \beta(l) \\ \theta(l) \end{Bmatrix}$$

$$-P \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & r_s^2\frac{1}{l} & 0 & 0 & -r_s^2\frac{1}{l} & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{15}l & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{30}l \\ -\frac{6}{5l} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & -r_s^2\frac{1}{l} & 0 & 0 & r_s^2\frac{1}{l} & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{30}l & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{15}l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0(0) \\ \beta(0) \\ \theta(0) \\ v_0(l) \\ \beta(l) \\ \theta(l) \end{Bmatrix} \qquad (8)$$

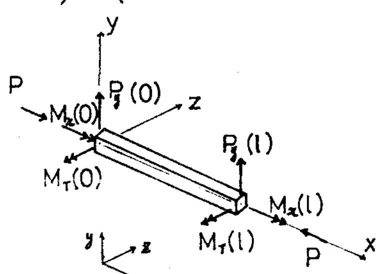

図-2

これらの剛性マトリックスを合計して全体の剛性マトリックスを作り，境界条件を与えた後，固有値問題として解く。すなわち変位を ϕ で表わして　$[K]\{\phi\} = P[A]\{\phi\}$　(9)

から P を求める一般固有値問題となる。これを解くにはコレスキー法を用いて　$[M]\{\psi\} = P\{\psi\}$　(10)

という標準固有値問題になおして P を求める。式(9)から式(10)を求めるには，コレスキー分解によって $[A] = [L][L^T]$ とする。ここで $[L]$ は下三角マトリックスである。また $\{\phi\} = [L^T]^{-1}\{\psi\}$ とおくと式(9)は $[K][L^T]^{-1}\{\psi\} = P[L][L^T][L^T]^{-1}\{\psi\} = P[L]\{\psi\}$ となるので

両辺に左から $[L]^{-1}$ をかけて　$[L]^{-1}[K][L^T]^{-1}\{\psi\} = P[L]^{-1}[L]\{\psi\} = P\{\psi\}$ となり，

$[M] = [L]^{-1}[K][L^T]^{-1}$ とおくと式(10)のような標準固有値問題となる。

3. 計算例

図-3 のような格子桁では部材が主桁2本，横桁2本であるから，全体の剛性マトリックスを作り，支点条件を与えると固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \frac{24EI}{a^3}+\frac{24EI_a}{b^3}-\left(\frac{12}{5a}+\frac{12}{5b}\right)P & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{a}+\frac{2}{b}GJ_a-\left(\frac{4}{15}a+r_s^2\frac{2}{b}\right)P & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a}GJ+\frac{8}{b}EI_a-\left(r_s^2\frac{2}{a}+\frac{4}{15}b\right)P \end{vmatrix}$$

$= 0$ となり，

$$P_1 = \frac{10\left(\frac{EI}{a^3}+\frac{EI_a}{b^3}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}, \quad P_2 = \frac{\left(\frac{8}{a}EI+\frac{2}{b}GJ_a\right)}{\left(\frac{4}{15}a+r_s^2\frac{2}{b}\right)},$$

$$P_3 = \frac{\left(\frac{2}{a}GJ+\frac{8}{b}EI_a\right)}{\left(r_s^2\frac{2}{a}+\frac{4}{15}b\right)}$$

が求められる。

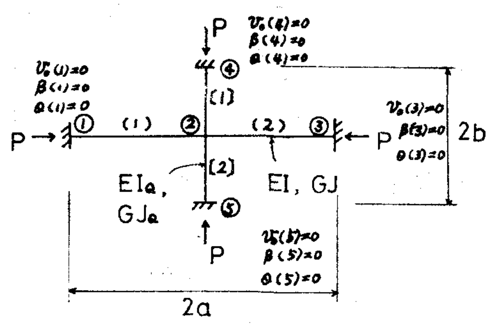

図-3

参考文献　1)成岡，服部，他3名：骨組構造解析，培風館，コンピュータによる構造工学講座 II-1-B
2)山田，佐藤：有限要素法における最近の固有値問題解法，生産研究 26巻6号