トラスで補剛されたガーダーの応力解析について

岩手大学工学部　正員　岩崎正二

1．まえがき

トラスの上弦材あるいは下弦材をガーダーに置き換えたトラス構造物，すなわちガーダーをトラスで補強した構造物の応力解析を試みたものである。ここではトラス下弦材のかわりにガーダーを考え，このガーダーを補剛すべきトラスのタイプとして格間長が一定の平行なワーレン型トラスを採用した。解析にあたっては，格点における力のつりあいから5本の差分方程式を誘導し，求むべき解がフーリエ定和分変換と逆変換公式を用いることで得られた。

2．力のつりあい

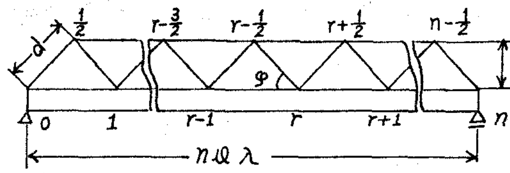

図-1

図-1に示すように上弦の格点を$\frac12,\frac32$のように$n-\frac12$まで，ガーダーのそれを$0,1,\cdots\cdots,n$とし上弦$r+\frac12$点の水平，鉛直変位を$u_{r+\frac12}, w_{r+\frac12}$，ガーダー$r$点の各変位とたわみ角を$u_r, w_r, \theta_r$とする。

r点と$r+\frac12$点のまわりの水平方向の力のつりあいは図-2から

$$(N_{r\cdot r+\frac12}-N_{r\cdot r-\frac12})c+N_{r\cdot r+1}-N_{r\cdot r-1}=0 \quad (1)$$

$$(N_{r+\frac12\cdot r+1}-N_{r+\frac12\cdot r})c+N_{r+\frac12\cdot r+\frac32}-N_{r-\frac12\cdot r+\frac12}=0 \quad (2)$$

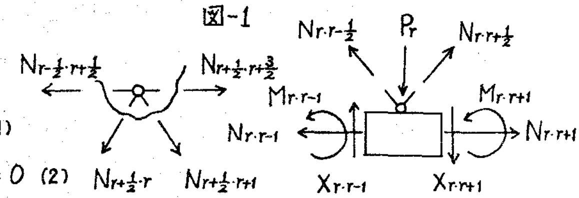

図-2　$r, r+\frac12$点における力

また鉛直方向の力のつりあいは

$$(N_{r\cdot r+\frac12}+N_{r\cdot r-\frac12})s-X_{r\cdot r+1}+X_{r\cdot r-1}=P_r \quad (3)$$

$$N_{r+\frac12\cdot r}+N_{r+\frac12\cdot r+1}=0 \quad (4)$$

格点rまわりのモーメントのつりあいは

$$M_{r\cdot r+1}+M_{r\cdot r-1}+e(N_{r\cdot r+1}-N_{r\cdot r-1})=0 \quad (5)$$

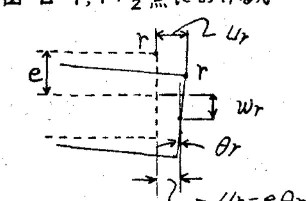

図-3　r点における変位

次に変位と断面力との間には

$$N_{r\cdot r+\frac12}=\frac{2E_3A_3}{\lambda}c\{(u_{r+\frac12}-u_r)c-(w_{r+\frac12}-w_r)s\} \quad (6)$$

$$N_{r-\frac12\cdot r+\frac12}=\frac{E_2A_2}{\lambda}(u_{r+\frac12}-u_{r-\frac12}) \quad (7)$$

$$N_{r-\frac12\cdot r}=\frac{2E_3A_3}{\lambda}c\{(u_r-u_{r-\frac12})c+(w_r-w_{r-\frac12})s\} \quad (8)$$

$$N_{r\cdot r+1}=\frac{E_1A_1}{\lambda}\{u_{r+1}-u_r-e(\theta_{r+1}-\theta_r)\} \quad (9)$$

$$M_{r\cdot r+1}=\frac{2E_1I}{\lambda}\{2\theta_r+\theta_{r+1}-3(w_{r+1}-w_r)/\lambda\} \quad (10)$$

$$M_{r\cdot r-1}=\frac{2E_1I}{\lambda}\{2\theta_r+\theta_{r+1}-3(w_r-w_{r-1})/\lambda\} \quad (11)$$

$$X_{r\cdot r+1}=X_{r+1\cdot r}=-\frac{6E_1I}{\lambda^2}\{\theta_{r+1}+\theta_r-2(w_{r+1}-w_r)/\lambda\} \quad (12)$$

上式中$A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3$はそれぞれガーダー，上弦材，斜材の断面積と弾性係数，Iはガーダーの断面2次モーメント，λは格間長，eはガーダー上縁から重心までの距離，$c=\cos\varphi$，$s=\sin\varphi$である。

(1)〜(5)式に(6)〜(12)式を代入して変位で書きかえると次の5本の連立差分方程式となる。

$$\frac{2E_3A_3}{\lambda}\{c^3(\nabla u_{r-\frac12}-2u_r)-c^2s\,\Delta w_{r-\frac12}\}+\frac{E_1A_1}{\lambda}\Delta^2u_{r-1}-e\frac{E_1A_1}{\lambda}\Delta^2\theta_{r-1}=0 \quad (13)$$

$$\frac{2E_3A_3}{\lambda}\{c^3(\nabla u_r-2u_{r+\frac12})+c^2s\,\Delta w_r\}+\frac{E_2A_2}{\lambda}\Delta^2u_{r-\frac12}=0 \quad (14)$$

$$\frac{2E_3A_3}{\lambda}\{c^2s\,\Delta u_{r-\frac12}-c\,s^2(\nabla w_{r-\frac12}-2w_r)\}+\frac{6E_1I}{\lambda^2}(\Delta\theta_r-2\Delta^2w_{r-1}/\lambda)=P_r \quad (15)$$

$$c^2s\,\Delta u_r+cs^2(\nabla w_r-2w_{r+\frac12})=0 \quad (16)$$

$$\frac{2E_1I}{\lambda}(\Delta^2\theta_{r-1}+6\theta_r-3\Delta w_r/\lambda)+\frac{eE_1A_1}{\lambda}\Delta^2 u_{r-1}-\frac{e^2E_1A_1}{\lambda}\Delta^2\theta_{r-1}=0 \qquad (17)$$

ただし $\Delta f_r=f_{r+1}-f_r$, $\Delta^2 f_{r-1}=f_{r+1}-2f_r+f_{r-1}$, $\Delta f_r=f_{r+1}-f_{r-1}$, $\nabla f_r=f_{r+1}+f_r$.

3. 変位の定和分変換と解式

上式(13)～(17)式で与えられる基本差分方程式中(13),(17)に cosine変換, (15)式に sine 変換, (14),(16)式に half sine 変換を作用させ境界条件を考慮すると次のようなマトリックス方程式となる。

$$\begin{bmatrix}
\frac{4E_3A_3}{\lambda}c^3+\frac{E_1A_1}{\lambda}D_i & -\frac{4E_3A_3}{\lambda}c^3\cos\frac{i\pi}{2n} & 0 & \frac{4E_3A_3}{\lambda}c^2s\cdot\sin\frac{i\pi}{2n} & -\frac{eE_1A_1}{\lambda}D_i \\
-\frac{4E_3A_3}{\lambda}c^3\cos\frac{i\pi}{2n} & \frac{4E_3A_3}{\lambda}c^3+\frac{E_2A_2}{\lambda}D_i & -\frac{4E_3A_3}{\lambda}c^2s\cdot\sin\frac{i\pi}{2n} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{4E_3A_3}{\lambda}c^2s\cdot\sin\frac{i\pi}{2n} & \frac{4E_3A_3}{\lambda}cs^2+\frac{12E_1I}{\lambda^3}D_i & -\frac{4E_3A_3}{\lambda}cs^2\cos\frac{i\pi}{2n} & -\frac{12E_1I}{\lambda^2}\sin\frac{i\pi}{n} \\
\frac{4E_3A_3}{\lambda}c^2s\cdot\sin\frac{i\pi}{2n} & 0 & -\frac{4E_3A_3}{\lambda}cs^2\cos\frac{i\pi}{2n} & \frac{4E_3A_3}{\lambda}cs^2 & 0 \\
-\frac{eE_1A_1}{\lambda}D_i & 0 & -\frac{12E_1I}{\lambda^2}\sin\frac{i\pi}{n} & 0 & \frac{2E_1I}{\lambda}(6-D_i)+\frac{e^2E_1A_1}{\lambda}D_i
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} R_i[u_r] \\ \bar{C}_i[u_{r+\frac12}] \\ S_i[w_r] \\ \bar{S}_i[w_{r+\frac12}] \\ R_i[\theta_r] \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} (-1)^i H_n + H_0 \\ 0 \\ S_i[P_r]-\frac{12E_1I}{\lambda^3}\sin\frac{i\pi}{n}\{(-1)^i w_n-w_0\} \\ 0 \\ -e\{(-1)^iH_n+H_0\}+\frac{3E_1I}{\lambda^2}(4-D_i)\{(-1)^i w_n-w_0\} \end{bmatrix}$$

ただし $R_i[u_r]=\sum_{r=1}^{n-1}u_r\cos\frac{i\pi}{n}r-\frac{u_n}{2}(-1)^i+\frac{u_0}{2}$, $\bar{C}_i[u_{r+\frac12}]=\sum_{r=0}^{n-1}u_{r+\frac12}\cos\frac{i\pi}{n}(r+\frac12)$, (18)

$S_i[w_r]=\sum_{r=1}^{n-1}w_r\sin\frac{i\pi}{n}r$, $\bar{S}_i[w_{r+\frac12}]=\sum_{r=0}^{n-1}w_{r+\frac12}\sin\frac{i\pi}{n}(r+\frac12)$, $D_i=2(1-\cos\frac{i\pi}{n})$, $(i, r=0, 1, 2, \cdots\cdots n)$.

上式を解くと定和分変換形での変位，たわみ角が求まり逆変換を行なうことにより実際の変位，たわみ角が求まる。これらを(6)～(12)式に代入することより所要の部材力，モーメントを求めることができる。今両端単純支持とし水平外力も作用していなとする。さらに点荷重 P が ξ 点にのみ作用したとすると $S_i[P_r]=P\cdot\sin\frac{i\pi}{n}\xi$ であるから，解式の一例を示すと上弦材応力とたわみに関して下式のようになり，r は注目する格点で ξ を変化させることより影響線が求まる。

$$N_{r-\frac12\cdot r+\frac12}=-\frac{P\lambda}{h}\left[\frac{\alpha_2}{K}\begin{cases}\frac{r(n-\xi)}{n} \\ \frac{\xi(n-r)}{n}\end{cases}+\left(\frac{\alpha_2}{K}-\frac{\alpha_1}{H}\right)G(r,\xi)\right]\begin{matrix} r<\xi \\ r\geq\xi\end{matrix} \qquad (19)$$

$$w_r=P\lambda\left[\left(\frac{2\alpha_1\alpha_2}{K}-\frac{\alpha_1^2H}{K^2}\right)\begin{cases}\frac{r(n-\xi)}{n} \\ \frac{\xi(n-r)}{n}\end{cases}+\left(6J-\frac{\alpha_1^2}{K}\right)\begin{cases}\frac{r(n-\xi)}{6n}\{\xi(2n-\xi)-r^2\} \\ \frac{\xi(n-r)}{6n}\{r(2n-r)-\xi^2\}\end{cases}+\frac{(K\alpha_2-H\alpha_1)^2}{K^2H}G(r,\xi)\right]\begin{matrix} r<\xi \\ r\geq\xi\end{matrix} \qquad (20)$$

ただし $J=\frac{\lambda^2}{6E_1I}$, $\mu=\frac{e}{h}$, $\alpha_1=6J(1+\mu)$, $\alpha_2=J(1+\frac{2}{3}\mu)$, $K=\frac{\lambda^2}{h^2}\left(\frac{1}{E_1A_1}+\frac{1}{E_2A_2}\right)+\frac{\alpha_1^2}{6J}$, $H=\frac{\lambda^2}{4h^2}\left(\frac{1}{E_1A_1}-\frac{8d^3}{E_3A_3\lambda^3}\right)+\frac{1}{24J}(\alpha_1^2-12J^2)$,

$$G(r,\xi)=\begin{cases}\frac{\sinh\alpha(n-\xi)\cdot\sinh\alpha r}{\sinh\alpha\cdot\sinh n\alpha} & (r<\xi) \\ \frac{\sinh\alpha\xi\cdot\sinh\alpha(n-r)}{\sinh\alpha\cdot\sinh n\alpha} & (r\geq\xi)\end{cases} \quad \text{for } \frac{K}{2H}\leq 0, \quad \alpha=\cosh^{-1}\left|\frac{2-K/H}{2}\right|.$$

同様にして荷重 q がすべての下部格点に作用する場合は $S_i[P_r]=\frac{q\{1-(-1)^i\}}{D_i}\sin\frac{i\pi}{n}$ であるから次のようになる。

$$N_{r-\frac12\cdot r+\frac12}=\frac{q\lambda}{h}\left[\left(\frac{\alpha_2}{K}-\frac{H\alpha_1}{K^2}\right)\{1-f(r)\}-\frac{\alpha_1}{K}\frac{r(n-r)}{2}\right] \qquad (21)$$

$$w_r=q\lambda\left[\left(6J-\frac{\alpha_1^2}{K}\right)\frac{r(n-r)\{r(n-r)+n^2+1\}}{24}-\left(\frac{2\alpha_1\alpha_2}{K^2}-\frac{\alpha_1^2H}{K^2}-J\right)\frac{r(n-r)}{2}-\frac{(K\alpha_2-H\alpha_1)^2}{K^3}\{1-f(r)\}\right] \qquad (22)$$

ただし $f(r)=\frac{\sinh\alpha(n-r)+\sinh\alpha r}{\sinh\alpha n}$ for $\frac{K}{2H}\leq 0$.

4. まとめ

以上有限和分変換の手法によって多次不静定構造物であるワーレン型トラストガーダーの解析と公式を示したが他の型のトラストガーダーも類似の方法で解析できる。

(参考文献) Nomachi, Matsuoka ; Application of Finite Fourier Intergration Transforms for Structural Mechanics.