

偶応力理論による脆性材料の力学的性質の解析

東北大学工学部 正員 佐武 正雄
 東北大学工学部 正員 岸野 佑次
 東北大学大学院 学生員 ○高橋 大助

1. はじめに 近來、材料の微視的変形を考慮した力学として“一般化された連続体力学”の理論的研究が種々行なわれている。このうち偶応力理論¹⁾は最も基礎的なものであり、理論の他に実験による研究も二、三なされている。本研究ではモルタル供試体の圧縮および曲げ試験²⁾を行ない、偶応力を用いた解析と比較することにより偶応力の影響を調べようとするものである。

2. 偶応力理論による三点曲げ試験の解析

著者らは写真-1 および図-1 に示すような曲げ試験を行ったが、これに対応した理論的解析をフーリエ級数により行なった。偶応力を考慮に入れた2次元弾性体(平面応力)の基礎方程式は次の式で与えられる¹⁾。

$$\nabla^4 \phi = 0, \quad \nabla^2 \psi - l^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\psi - l^2 \nabla^2 \psi) &= -\frac{2}{1+\nu} l^2 \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \phi \\ \frac{\partial}{\partial y} (\psi - l^2 \nabla^2 \psi) &= \frac{2}{1+\nu} l^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに ϕ , ψ は応力関数, l は特性長である¹⁾。また、境界条件は次の式で与えられる

$$\left. \begin{aligned} y = \pm C, \quad \tau_{xy} &= 0 \\ y = +C, \quad \sigma_y &= q(x) \\ y = -C, \quad \sigma_y &= -p(x) \\ y = \pm C, \quad \mu_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3) \quad \left. \begin{aligned} x = \pm L, \quad \sigma_x &= 0 \\ x = \pm L, \quad \sigma_x &= 0 \\ x = \pm L, \quad \mu_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに $p(x)$, $q(x)$ は荷重 P および反力の余弦フーリエ級数(係数をそれぞれ A_n , B_n とする)で与えられ図-1 の方向を正とする。

今、 ϕ , ψ を x についての対称性を考慮して次のように仮定する。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos \alpha x, \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y) \sin \alpha x \quad (5)$$

式(5)を式(1)に代入すると解の形は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cosh \alpha y + C_n' \sinh \alpha y + C_n'' y \cosh \alpha y + C_n''' y \sinh \alpha y \right) \cos \alpha x \\ \psi &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(K_n \cosh \alpha y + K_n' \sinh \alpha y + K_n'' \cosh \beta y + K_n''' \sinh \beta y \right) \sin \alpha x \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{ここに, } \alpha = n\pi/L, \quad \beta = \sqrt{1+l^2\alpha^2}/l$$

係数 $C_1 \sim C_4$, $K_1 \sim K_4$ は境界条件(3)と適合条件(2)とにより決定される。境界条件(4)については

$$\int_{-C}^C \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-C}^C y \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-C}^C \mu_x dy = 0 \quad (7)$$

を満たすように線形分布を σ_x , μ_x に加え $x = \pm L$ に作用さ

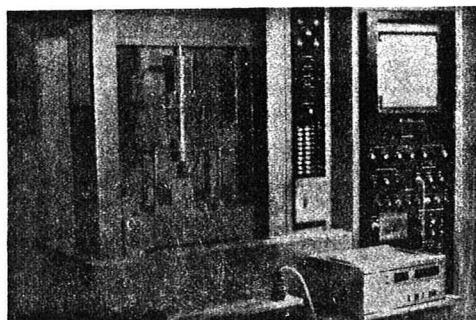


写真-1 モルタル供試体の曲げ試験

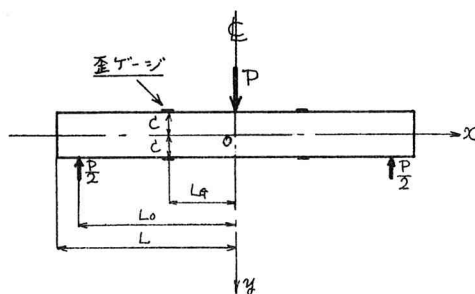


図-1 モルタル供試体の載荷状態

せ補正を行なうこととした³⁾。この場合応力関数の補正項 ϕ' , ψ' は次の式で与えられる。

$$\phi' = \frac{P}{2} y^3, \quad \psi' = kx \quad (8)$$

k は k の式により求まる。 σ_x についての解を式(9)に示す。また l を変化させたときのゲージ貼付位置における σ_x の値を図-2 に示す。ただし $L = 8.0 \text{ cm}$, $L_0 = 7.0 \text{ cm}$, $L_g = 3.0 \text{ cm}$, $C = 2.0 \text{ cm}$ 。

3. モルタル供試体の圧縮および曲げ試験

実験は $40 \times 40 \times 160 \text{ mm}$ の寸法のモルタル供試体を用いた。 W/C は $0.45, 0.55, 0.65$ の3種とし、養生材令は7日である。圧縮試験では

$$\begin{aligned}
\sigma_x = & \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \frac{(\alpha C \cosh \alpha c - \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cos \alpha x - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n) \frac{(\alpha C \sinh \alpha c - \cosh \alpha c) \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \cos \alpha x \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \frac{2\alpha^2 \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \frac{(\sinh \alpha c - \frac{\beta \cosh \beta c}{\alpha \cosh \alpha c} \sinh \alpha c)}{(\sinh 2\alpha c + 2\alpha c) \frac{\beta \cosh \beta c}{\alpha \cosh \alpha c} \frac{1+\nu}{4\beta^2}} \left\{ (\alpha C \sinh \alpha c - 2 \cosh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \cosh \alpha c \right\} \cos \alpha x \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n) \frac{2\alpha^2 \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \frac{(\cosh \alpha c - \frac{\beta \sinh \beta c}{\alpha \sinh \alpha c} \cosh \alpha c)}{(\sinh 2\alpha c - 2\alpha c) \frac{\beta \sinh \beta c}{\alpha \sinh \alpha c} \frac{1+\nu}{4\beta^2}} \left\{ (\alpha C \cosh \alpha c - 2 \sinh \alpha c) \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \sinh \alpha c \right\} \cos \alpha x \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \frac{\alpha \beta \sinh \alpha c (\cosh \beta y - \frac{\cosh \beta c}{\cosh \alpha c} \cosh \alpha y)}{(\sinh 2\alpha c + 2\alpha c) \frac{\beta \cosh \beta c}{\alpha \cosh \alpha c} \frac{1+\nu}{4\beta^2} - 2\alpha^2 \cosh \alpha c (\sinh \alpha c - \frac{\beta \cosh \beta c}{\alpha \cosh \alpha c} \sinh \alpha c)} \cos \alpha x \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n) \frac{\alpha \beta \cosh \alpha c (\sinh \beta y - \frac{\sinh \beta c}{\sinh \alpha c} \sinh \alpha y)}{(\sinh 2\alpha c - 2\alpha c) \frac{\beta \sinh \beta c}{\alpha \sinh \alpha c} \frac{1+\nu}{4\beta^2} - 2\alpha^2 \sinh \alpha c (\cosh \alpha c - \frac{\beta \sinh \beta c}{\alpha \sinh \alpha c} \cosh \alpha c)} \cos \alpha x \\
& - \frac{\nu}{2C} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n) \left\{ \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2 \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \sinh \beta c \cosh \alpha c \cos \alpha x}{(\sinh 2\alpha c - 2\alpha c) \frac{\beta \sinh \beta c}{\alpha \sinh \alpha c} \frac{1+\nu}{4\beta^2} - 2\alpha^2 \sinh \alpha c (\cosh \alpha c - \frac{\beta \sinh \beta c}{\alpha \sinh \alpha c} \cosh \alpha c)} \right\} \quad (9)
\end{aligned}$$

ヤング率とポアソン比を、曲げ試験では圧縮および引張縁でのひずみを測定した。結果をそれぞれ表-1, 表-2に示す。なお、これらの試験はインストロン型万能材料試験機(島津オートグラフ5000)を用いて行なった。

4. 考察 図-2よりわかるように l が大きくなると σ_x は減少し, $l = 0.1 \text{ cm}$ 当りから減少の割合が特に大となり、また $l \rightarrow 0$ では古典弾性理論に一致する。図-2, 表-1, 2をもとにモルタルについての l を推定したところ $l \approx 0.20 \text{ cm}$ の値を得た。実験に用いた砂の最大粒径は 0.1 cm 前後であり, l に近い値となっている。このことは, l が一般に結晶粒のオーダーであると言われていることに対応し、ある程度妥当と考えられる。しかし実験精度の面(本実験は標準偏差 0.5%程度)および理論計算の際の境界条件設定上の問題(特に水平反力の導入など)に関してなお検討を加え, l についてより正確な把握を行なうことを必要とすると思われる。

5. 結語 本文ではとくに供試体の曲げ試験をもとに偶応力理論における特性長の推定を試みた。アルミなどの材料では偶応力の影響は余り顕著ではないことが報告されているのに対し²⁾、本文に示したように、特にモルタルなどの脆性材料においては偶応力の影響が大きいことが予想されるので、更に詳細に調べたいと考えている。なお、本研究は昭和51年度科学研費(一般研究(8)課題番号146103)の補助を受けたものであることを附記する。

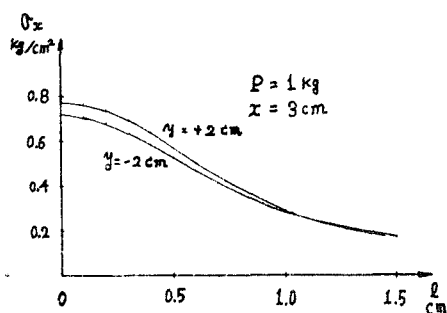


図-2 σ_x と l の関係(理論計算)

表-1 圧縮試験結果

W/C	0.45	0.55	0.65
ヤング率(Kg/cm ²)	2.299×10^5	1.908×10^5	1.632×10^5
ポアソン比	0.170	0.165	0.167

表-2 曲げ試験結果(P=1Kg)

W/C	0.45	0.55	0.65
σ_x^*	3.003×10^6	3.560×10^6	4.088×10^6
応力 ** (Kg/cm ²)	0.6904	0.6792	0.6672

* 引張縁および圧縮縁での平均値

** 表-1のヤング率をもとに計算した値

参考文献

- 1) Mindlin, R.D.: Exp. Mech., 3 (1963), 1
- 2) Schijve, J.: J. Mech. Phys. Solids, 14 (1966), 113
- 3) Bleien, E.: Bauingenieur, 4 (1923), 255