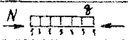
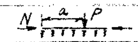
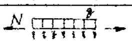
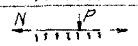
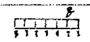
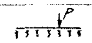
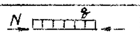
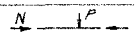
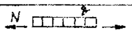
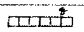
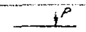
桁に関する4階の微分方程式の剛性マトリックスの荷重項

岩手大学　正員　　宮本 裕
久慈高校　正員　○安彦敏郎

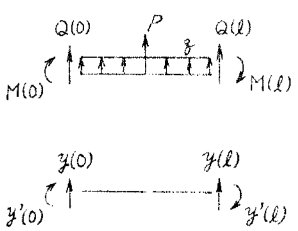
本研究は，要素間に荷重のある場合の種々の4階の微分方程式から導かれる剛性マトリックスの荷重項について整理したものである。

	要素間に等分布荷重 q のある場合		要素間に集中荷重 P のある場合	
	桁の状態	微分方程式	桁の状態	微分方程式
A		$EIy^{(4)}+Ny^{(2)}+ky=q$		$EIy^{(4)}+Ny^{(2)}+ky=P\delta(x-a)$
B		$EIy^{(4)}-Ny^{(2)}+ky=q$		$EIy^{(4)}-Ny^{(2)}+ky=P\delta(x-a)$
C		$EIy^{(4)}+ky=q$		$EIy^{(4)}+ky=P\delta(x-a)$
D		$EIy^{(4)}+Ny^{(2)}=q$		$EIy^{(4)}+Ny^{(2)}=P\delta(x-a)$
E		$EIy^{(4)}-Ny^{(2)}=q$		$EIy^{(4)}-Ny^{(2)}=P\delta(x-a)$
F		$EIy^{(4)}=q$		$EIy^{(4)}=P\delta(x-a)$

ただし，AとBについては $N \gtrless \sqrt{k \cdot EI}$ の場合について求めたものである。

上の微分方程式をラプラス変換を用いて $y(x)=$(余関数)+(特解) の形で解き，$y(x)$, $y'(x)$, $\frac{M(x)}{EI}$, $\frac{Q(x)}{EI}$ を4個の未定係数の入った式で表わす。つぎに，$x=0$ を代入し，4個の未定係数を $y(0)$, $y'(0)$, $\frac{M(0)}{EI}$, $\frac{Q(0)}{EI}$ で表わし，これらの未定係数をもとの4つの式に代入し，それらの式に改めて $x=l$ を代入すると次のマトリックスを得る

$$\begin{pmatrix} y(l) \\ y'(l) \\ \frac{M(l)}{EI} \\ \frac{Q(l)}{EI} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \frac{M(0)}{EI} \\ \frac{Q(0)}{EI} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_4 \\ C_3 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} \quad \cdots (1)$$



式(1)より式(2)が誘導される

$$\begin{pmatrix} \frac{Q(0)}{EI} \\ \frac{M(0)}{EI} \\ \frac{Q(l)}{EI} \\ \frac{M(l)}{EI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \text{stiffness} & \\ & & \text{matrix} \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y(l) \\ y'(l) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_1 \\ G_1 \\ H_2 \\ G_2 \end{pmatrix} \quad \cdots (2)$$

stiffness matrix についてはすでに求めてあるので，今回は荷重項 H_1, G_1, H_2, G_2 についてのみ整理する。

	要素間に等分布荷重 q のある場合	要素間に集中荷重 P のある場合
A	$H_1=\dfrac{2q\alpha\beta(\cos\alpha l-\cos\beta l)}{EI(\alpha^2-\beta^2)(\alpha\sin\beta l+\beta\sin\alpha l)}$	$H_1=-t[\alpha^2\sin\beta l\sin\beta(l-a)\cos\alpha a-\alpha\beta\{\sin\alpha l\cos\alpha(l-a)\sin\beta a-\sin\beta l\cos\beta(l-a)\sin\alpha a\}-\beta^2\sin\alpha l\sin\alpha(l-a)\cos\beta a]$
	$G_1=\dfrac{q\ (\alpha\sin\beta l-\beta\sin\alpha l)}{EI(\alpha^2-\beta^2)(\alpha\sin\beta l+\beta\sin\alpha l)}$	$G_1=t\{\alpha\sin\beta l\sin\beta(l-a)\sin\alpha a-\beta\sin\alpha l\sin\alpha(l-a)\sin\beta a\}$
	$H_2=\dfrac{2q\alpha\beta(\cos\alpha l-\cos\beta l)}{EI(\alpha^2-\beta^2)(\alpha\sin\beta l+\beta\sin\alpha l)}$	$H_2=-t[\alpha^2\sin\beta l\cos\alpha(l-a)\sin\beta a-\alpha\beta\{\sin\alpha l\sin\beta(l-a)\cos\alpha a-\sin\beta l\sin\alpha(l-a)\cos\beta a\}-\beta^2\sin\alpha l\cos\beta(l-a)\sin\alpha a]$
	$G_2=\dfrac{-q\ (\alpha\sin\beta l-\beta\sin\alpha l)}{EI(\alpha^2-\beta^2)(\alpha\sin\beta l+\beta\sin\alpha l)}$	$G_2=-t\{\alpha\sin\beta l\sin\alpha(l-a)\sin\beta a-\beta\sin\alpha l\sin\beta(l-a)\sin\alpha a\}$

ただし　$\alpha=\sqrt{N/4EI+\sqrt{k/4EI}}$, $\beta=\sqrt{N/4EI-\sqrt{k/4EI}}$, $t=P/(\alpha^2\sin^2\beta l-\beta^2\sin^2\alpha l)EI$

B

$$H_1=\frac{2q\alpha\beta\,(\cosh\beta l-\cosh\alpha l)}{EI(\alpha^2-\beta^2)(\beta\sinh\alpha l+\alpha\sinh\beta l)}$$

$$G_1=\frac{q\,(\beta\sinh\alpha l-\alpha\sinh\beta l)}{EI(\alpha^2-\beta^2)(\beta\sinh\alpha l+\alpha\sinh\beta l)}$$

$$H_2=\frac{2q\alpha\beta(\cosh\beta l-\cosh\alpha l)}{EI(\alpha^2-\beta^2)(\beta\sinh\alpha l+\alpha\sinh\beta l)}$$

$$G_2=\frac{-q(\beta\sinh\alpha l-\alpha\sinh\beta l)}{EI(\alpha^2-\beta^2)(\beta\sinh\alpha l+\alpha\sinh\beta l)}$$

$$H_1=-t[\alpha^2\sinh\beta l\sinh\beta(l-a)\cosh\alpha a-\alpha\beta\{\sinh\alpha l\cosh\alpha(l-a)\sinh\beta a$$
$$-\sinh\beta l\cosh\beta(l-a)\sinh\alpha a\}-\beta^2\sinh\alpha l\sinh\alpha(l-a)\cosh\beta a]$$

$$G_1=t\{\alpha\sinh\beta l\sinh\beta(l-a)\sinh\alpha a-\beta\sinh\alpha l\sinh\alpha(l-a)\sinh\beta a\}$$

$$H_2=-t[\alpha^2\sinh\beta l\cosh\alpha(l-a)\sinh\beta a-\alpha\beta\{\sinh\alpha l\sinh\beta(l-a)\cosh\alpha a$$
$$-\sinh\beta l\sinh\alpha(l-a)\cosh\beta a\}-\beta^2\sinh\alpha l\cosh\beta(l-a)\sinh\alpha a]$$

$$G_2=-t\{\alpha\sinh\beta l\sinh\alpha(l-a)\sinh\beta a-\beta\sinh\alpha l\sinh\beta(l-a)\sinh\alpha a\}$$

ただし　$\alpha=\sqrt{N/4EI+\sqrt{k/4EI}}$, $\beta=\sqrt{N/4EI-\sqrt{k/4EI}}$, $t=P/(\alpha^2\sinh^2\beta l-\beta^2\sinh^2\alpha l)EI$

C

$$H_1=\frac{-q(\cosh\mu l-\cos\mu l)}{EI\mu(\sinh\mu l+\sin\mu l)}$$

$$G_1=\frac{q(\sinh\mu l-\sin\mu l)}{2EI\mu^2(\sinh\mu l+\sin\mu l)}$$

$$H_2=\frac{-q(\cosh\mu l-\cos\mu l)}{EI\mu(\sinh\mu l+\sin\mu l)}$$

$$G_2=\frac{-q(\sinh\mu l-\sin\mu l)}{2EI\mu^2(\sinh\mu l+\sin\mu l)}$$

$$H_1=t[\sinh\mu l\{\sinh\mu(l-a)\cos\mu a+\cosh\mu(l-a)\sin\mu a\}$$
$$-\sin\mu l\{\sin\mu(l-a)\cosh\mu a+\cos\mu(l-a)\sinh\mu a\}]$$

$$G_1=\frac{t}{\mu}\{\sinh\mu l\sinh\mu(l-a)\sin\mu a-\sin\mu l\sin\mu(l-a)\sinh\mu a\}$$

$$H_2=-t[\sinh\mu l\{\sin\mu(l-a)\cosh\mu a+\cos\mu(l-a)\sinh\mu a\}$$
$$-\sin\mu l\{\sinh\mu(l-a)\cos\mu a+\cosh\mu(l-a)\sin\mu a\}]$$

$$G_2=\frac{-t}{\mu}\{\sinh\mu l\sin\mu(l-a)\sinh\mu a-\sin\mu l\sinh\mu(l-a)\sin\mu a\}$$

ただし　$\mu=\sqrt[4]{k/4EI}$,　$t=P/(\sinh^2\mu l-\sin^2\mu l)EI$

D

$$H_1=\frac{-ql}{2EI}\qquad H_2=\frac{-ql}{2EI}$$

$$G_1=\frac{q\{4-\lambda^2l^2-(4+\lambda^2l^2)\cos\lambda l\}}{2EI\lambda^2(2-2\cos\lambda l+\lambda l\sin\lambda l)}$$

$$G_2=\frac{-q\{4-\lambda^2l^2-(4+\lambda^2l^2)\cos\lambda l\}}{2EI\lambda^2(2-2\cos\lambda l+\lambda l\sin\lambda l)}$$

$$H_1=-t\{1-\lambda(l-a)\sin\lambda l-\cos\lambda l-\cos\lambda(l-a)+\cos\lambda a\}$$

$$G_1=\frac{t}{\lambda}[\lambda l\{1-\cos\lambda(l-a)\}-\lambda(l-a)(1-\cos\lambda l)-\sin\lambda l+\sin\lambda(l-a)+\sin\lambda a]$$

$$H_2=-t\{1-\lambda a\sin\lambda l-\cos\lambda l+\cos\lambda(l-a)-\cos\lambda a\}$$

$$G_2=\frac{-t}{\lambda}[\lambda l(1-\cos\lambda a)-\lambda a(1-\cos\lambda l)-\sin\lambda l+\sin\lambda(l-a)+\sin\lambda a]$$

ただし　$\lambda=\sqrt{N/EI}$,　$t=P/(2-2\cos\lambda l-\lambda l\sin\lambda l)EI$

E

$$H_1=\frac{-ql}{2EI}\qquad H_2=\frac{-ql}{2EI}$$

$$G_1=\frac{-q\{4+\lambda^2l^2-(4-\lambda^2l^2)\cosh\lambda l\}}{2EI\lambda^2(2-2\cosh\lambda l-\lambda l\sinh\lambda l)}$$

$$G_2=\frac{q\{4+\lambda^2l^2-(4-\lambda^2l^2)\cosh\lambda l\}}{2EI\lambda^2(2-2\cosh\lambda l-\lambda l\sinh\lambda l)}$$

$$H_1=-t\{1+\lambda(l-a)\sinh\lambda l-\cosh\lambda l-\cosh\lambda(l-a)+\cosh\lambda a\}$$

$$G_1=\frac{t}{\lambda}[\lambda l\{1-\cosh\lambda(l-a)\}-\lambda(l-a)(1-\cosh\lambda l)-\sinh\lambda l+\sinh\lambda(l-a)+\sinh\lambda a]$$

$$H_2=-t\{1+\lambda a\sinh\lambda l-\cosh\lambda l+\cosh\lambda(l-a)-\cosh\lambda a\}$$

$$G_2=\frac{-t}{\lambda}[\lambda l(1-\cosh\lambda a)-\lambda a(1-\cosh\lambda l)-\sinh\lambda l+\sinh\lambda(l-a)+\sinh\lambda a]$$

ただし　$\lambda=\sqrt{N/EI}$,　$t=P/(2-2\cosh\lambda l+\lambda l\sinh\lambda l)EI$

F

$$H_1=\frac{-ql}{2EI}\qquad H_2=\frac{-ql}{2EI}$$

$$G_1=\frac{ql^2}{12EI}\qquad G_2=\frac{-ql^2}{12EI}$$

$$H_1=\frac{-P}{l^3EI}(l-a)^2(l+2a)\qquad H_2=\frac{-P}{l^3EI}a^2(3l-2a)$$

$$G_1=\frac{P}{l^2EI}a(l-a)^2\qquad G_2=\frac{-P}{l^2EI}a^2(l-a)$$

参考文献　1) 宮本, 小嶋：ラプラス変換による弾性床上桁の剛性マトリックス解析, 昭和50年度東北支部講演概要集

2) 宮本, 島津, 相沢：桁に関する4階の微分方程式の剛性マトリックスについて, 昭和50年度東北支部講演概要集

3) 渡辺, 宮本, 安彦：弾性床上の棒の座屈の剛性マトリックス解析法について, 第30回講演概要集