

東北大学 正員 佐武正雄
東北大学 正員 新聞 茂
福島県 正員 ○鈴木 隆

1. まえがき

板の代表的理論には、Kirchhoff-Love の仮定に基づいた古典理論、また Kirchhoff-Love の仮定を除き比較的厚い板にも適用できるように改良されたライスナー理論や、最近アンバルツミヤン¹⁾によって提案された理論などがある。ライスナー理論では板厚方向の応力分布がエネルギー的に等価な直線分布に置換されているが、アンバルツミヤンの理論では板厚方向の応力分布が板を三次元連続体として考えた場合の応力分布に近い曲線で近似されており、この理論の特殊な場合としてライスナー理論を導くことができる。古典理論と Kirchhoff-Love の仮定を除いた改良理論との差異は、異方性板の場合に顕著になるものと考えられる。

ライスナー理論の板の有限要素解析への応用は Pryor, Baker および Frederick 等²⁾によって行われている。本文は、板の改良理論の一つで上述したような特徴を有するアンバルツミヤンの理論の有限要素解析への適用について述べたものである。

2. アンバルツミヤンの板の理論の概要¹⁾

板の有限要素モデルの定式化に用いられるアンバルツミヤンの理論の概略について説明する。板の中央面に x, y 軸、またこれらに直交し下向きに z をとるものとする。アンバルツミヤンの理論では次の仮定が導入される。

仮定 1. 板の中央面に垂直な変位 u_z は座標に無関係である。

仮定 2. セン断力 T_{xz} および T_{yz} はある与えられた法則にしたがって分布する。

仮定 1 により $e_z = 0$, $u_z = w(x, y)$ であり、仮定 2 により T_{xz} と T_{yz} は

$$T_{xz} = f_1(x) \varphi(x, y), \quad T_{yz} = f_2(x) \psi(x, y) \quad (1)$$

と記すことができる。 f_1 と f_2 はセン断力の厚さ方向の変化を示す関数、 φ と ψ は未知関数である。また、直交異方性材料の場合、応力-歪関係は、仮定 1 により

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ T_{xy} \\ T_{xz} \\ T_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \\ \delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_1 \\ -B_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_z \quad (2)$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1/(E_1 G_{12} \Omega), \quad A_{12} = 1/2/(E_2 G_{12} \Omega), \\ A_{22} &= 1/(E_1 G_{12} \Omega), \quad A_{33} = 1/G_{12}, \quad A_{44} = 1/(G_{23} W), \\ A_{55} &= 1/(G_{13} W), \quad \Omega = (E_2 - \nu_{12} E_1)/(E_1 E_2^2), \quad W = 1/(G_{23} G_{13}) \\ B_1 &= -(A_{11} \nu_{13} + A_{12} \nu_{23})/E_3 \\ B_2 &= -(A_{12} \nu_{13} + A_{22} \nu_{23})/E_3 \end{aligned}$$

E, ν, G の添字 1, 2, 3 は弾性主方向を表わす指標で、それぞれ x, y, z 方向に平行である。式 (2) を次のように書き換える。

$$\{\sigma\} = [A]\{e\} + \{B\} \sigma_z \quad (3)$$

式 (1), (2) よりセン断歪 δ_{xz} , δ_{yz} は

$$\delta_{xz} = f_1(x) \varphi(x, y) / A_{44} \quad (4)$$

$$\delta_{yz} = f_2(x) \psi(x, y) / A_{55} \quad (5)$$

変位-歪関係を考慮すれば、曲 φ による板の x, y 方向の変位 u_x, u_y は

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} + J_{01} \varphi / A_{44} \quad (6)$$

$$u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y} + J_{02} \psi / A_{55} \quad (7)$$

と表わされる。ただし、 $J_{01} = \int_0^z f_1(x) dz$, $J_{02} = \int_0^z f_2(x) dz$ である。変位-歪関係を用いることにより

$$e_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{J_{01}}{A_{44}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (8)$$

$$e_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{J_{02}}{A_{55}} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (9)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{J_{01}}{A_{44}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{J_{02}}{A_{55}} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10)$$

が得られる。 $f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2}(\frac{R^2}{4} - z^2)$ とし、物体力が存在しない場合の応力の平衡条件式を用いることにより垂直応力 σ_z は

$$\sigma_z = -J_{01} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - J_{02} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (11)$$

と表わされる。板の上、下の面に作用する荷重をそれぞれ g^-, g^+ とし、 $g = g^- + g^+$ 、また、板厚を h として $C_{ij} = \frac{h^3}{12} A_{ij}$ とおいた場合、式 (1), (2),

(3), (7), (10) により, モーメントおよび合力は次のように表現される.

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{C_{11}}{A_{44}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{C_{12}}{A_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \frac{h^2}{10} B_1 \delta \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = -C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{C_{12}}{A_{44}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{C_{22}}{A_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \frac{h^2}{10} B_2 \delta \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = 2C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left(\frac{C_{33}}{A_{44}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{C_{33}}{A_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) \\ Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = \frac{h^3}{12} p, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz = \frac{h^3}{12} \psi \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3. アンバールツミヤンの理論による有限要素モデルの定式化

アンバールツミヤンの理論による有限要素モデルの剛性マトリックスの定式化について説明する. 今, $x = \text{const}$ および $y = \text{const}$ 面における平均的なたわみ角 θ_x, θ_y (式(10), (11)を用い, それぞれ次のように定義する.

$$\theta_x = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial u_x}{\partial z} dz = -\frac{\partial w}{\partial x} + \bar{e}_x \quad (14)$$

$$\theta_y = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial u_y}{\partial z} dz = -\frac{\partial w}{\partial y} + \bar{e}_y \quad (15)$$

ただし, $\bar{e}_x = h^2 p / (12A_{44})$, $\bar{e}_y = h^2 \psi / (12A_{55})$ である.

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^2y & xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}, \alpha_{17}, \alpha_{18}, \alpha_{19}, \alpha_{20}\}^T \quad (21)$$

と仮定する. 要素の各節点での変形を表すベクトル $\{v\}$ とすれば, 式(18)を用いて

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{v\} \quad (22)$$

記述される. 歪ベクトル $\{e\}$ を

$$\{e\} = \{e_x, e_y, e_{xy}, e_{xz}, e_{yz}\}^T \quad (23)$$

と表わせば, 式(4), (5), (8), (9), (10) より $\{e\}$ は $\{u\}$ を用いて

$$\{e\} = [G] \{u\} \quad (24)$$

ただし,

$$[G] = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 12 \frac{J_{01}}{h^3} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -z \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 12 \frac{J_{02}}{h^3} \frac{\partial}{\partial x} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & 12 \frac{J_{01}}{h^3} \frac{\partial}{\partial y} & 12 \frac{J_{02}}{h^3} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \quad (25)$$

また, σ_x は式(11)より

$$\sigma_x = \{H\}^T \{u\} \quad (26)$$

$$\text{ただし, } \{H\} = \{0, -12 \frac{J_{01} A_{44}}{h^3} \frac{\partial}{\partial x}, -12 \frac{J_{02} A_{55}}{h^3} \frac{\partial}{\partial y}\}^T \quad (27)$$

要素の代表的節点 i における変形ベクトル $\{v\}_i$ および等価節点力 $\{F\}_i$ を次のように定義する.

$$\{v\}_i = \{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \bar{e}_{xi}, \bar{e}_{yi}\}^T \quad (16)$$

$$\{F\}_i = \{P_i, M_{xi}, M_{yi}, Q_{xi}, Q_{yi}\}^T \quad (17)$$

また, 矩形要素を用いるものとし, $w, \bar{e}_x, \bar{e}_y$ を

$$\{u\} = [M] \{\alpha\} \quad (18)$$

とすれば,

$$\{u\} = \{w, \bar{e}_x, \bar{e}_y\}^T \quad (19)$$

と表現される. 仮想歪 $\{\delta e\}$ によって要素内に生じる歪エネルギー δw_i は式(3), (22), (24), (26)を用いて

$$\begin{aligned} \delta w_i &= \int_v \{\delta e\}^T \{\sigma\} dv \\ &= \{\delta v\}^T ([K_1] + [K_2]) \{\delta v\} \end{aligned} \quad (28)$$

ただし

$$[K_1] = ([C])^{-1} \int_v [M]^T [G]^T [A] [G] [M] dv [C]^{-1} \quad (29)$$

$$[K_2] = ([C])^{-1} \int_v [M]^T [H] [B] [H]^T [M] dv [C]^{-1} \quad (30)$$

したがって, 外力による仕事 $\delta w_e = \{\delta v\}^T \{F\}$ と δw_i を等置すれば, 等価節点力 $\{F\}$ と変形ベクトル $\{u\}$ の関係は

$$\{F\} = ([K_1] + [K_2]) \{u\} \quad (31)$$

なお, 数値計算結果は当日スライドによって発表する予定である.

参考文献

1. Ambartsumyan S.A. (神谷紀生訳), 異方性板の理論, 森北出版, 1975
2. Pryor, C.W. Jr., Barker, R.M. and Frederick, D., Finite Element Bending Analysis of Reissner Plates, ASCE, EY 16, pp.967-983, 1970