鞍点型変分原理に関する一考察

東北大学工学部　正員　佐武正雄
東北大学工学部　正員　○新関　茂

1. まえがき

マトリックス法の基礎である離散化手法には，変分原理，仮想仕事原理，重みつき残差法などがある．これらのうちでも変分原理は，汎関数の停留条件であるEulerの方程式として基礎微分方程式などが得られることや正解の上下界が最小ポテンシャルエネルギー原理と最小コンプレメンタリ・エネルギー原理から求められるという利点があり，最も有力な離散化手法と考えられ，その適用範囲も次第に拡大されつつある[1]．しかし，変分原理によって求められた近似解と正解を比較した場合の離散化誤差を評価する方法は，有限要素法等で行なわれているオーダー評価を除けば，わずかに Kantrovich と Krylov[2]，Mikhlin[3] 等によって考察されているだけで，その一般的な方法はまだ確立されていない．また，上下界性の明らかにされているのは上述の極値型の変分原理だけであり，鞍点型の変分原理に関しては不明である．しかし，近年のマトリックス法の発展に伴い，鞍点型変分原理が，しばしば用いられるようになり，極値型の変分原理よりも，鞍点型変分原理にもとづいた数値計算結果が良好な精度を与えることが報告されている．本文は，双対な変分原理である最小ポテンシャル・エネルギー原理と最小コンプレメンタリ・エネルギー原理の性質を用いて，Hellinger－Reissner原理を例として，鞍点型の変分原理について考察したものである．

2. 最小ポテンシャル・エネルギーおよび最小コンプレメンタリ・エネルギー原理の性質

鞍点型の変分原理は，極値型の変分原理にFriedrichs変換を行うことによって得られるので，ここでは，鞍点型変分原理の基礎として，最小ポテンシャル・エネルギーおよび最小コンプレメンタリ・エネルギー原理について考察する．3次元弾性体のポテンシャル・エネルギー原理は，

$$J_p[u_i] = \frac{1}{2}\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv - \int_v \hat{f}_i u_i dv - \int_{S\sigma} \hat{t}_i u_i ds \qquad (1)$$

を付帯条件

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j}+u_{j,i})/2 \qquad (3)$$

$$u_i = \hat{u}_i \quad S_u\text{上で} \qquad (4)$$

のもとで最小にすることである．ここに u_i は変位ベクトル，ε_{ij} は歪テンソル，$\hat{f}_i$ と $\hat{t}_i$ はそれぞれ与えられた物体力および表面力，E_{ijkl} は弾性係数，S_σ, S_u はそれぞれ応力および変位の与えらた境界で $\partial v = S_\sigma + S_u$，また，繰り返し表われる指標については和をとるものとする．上述の σ_{ij} は平衡条件を満足しない応力である．与えられた問題の正解に関する力学量に（＊）をつけて表した場合，次の恒等式

$$\frac{1}{2}\int_v(\sigma_{ij}-\sigma^*_{ij})(\varepsilon_{ij}-\varepsilon^*_{ij})dv = \frac{1}{2}\int_v\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv - \int_v\hat{f}^*_i u_i dv - \int_{S_\sigma}\hat{t}^*_i u_i ds - \int_{S_u} t^*_i \hat{u}_i ds + \frac{1}{2}\int_v \sigma^*_{ij}\varepsilon^*_{ij}dv \qquad (5)$$

が成り立つ．式(5)を用いれば，式(1)は次のように書き換えられる．

$$J_p - J^* = \frac{1}{2}\int_v(\sigma_{ij}-\sigma^*_{ij})(\varepsilon_{ij}-\varepsilon^*_{ij})dv \qquad (6)$$

ただし

$$\begin{aligned} J^* &= J[u^*_i] \\ &= \frac{1}{2}\int_v \sigma^*_{ij}\varepsilon^*_{ij}dv - \int_v \hat{f}^*_i u^*_i dv - \int_{S_\sigma}\hat{t}^*_i u^*_i ds \qquad (7) \\ &= -\frac{1}{2}\int_v \sigma^*_{ij}\varepsilon^*_{ij}dv + \int_{S_u} t^*_i \hat{u}^*_i ds \qquad (8) \end{aligned}$$

で，J^* は与えられた問題の正解に対応するポテンシャル・エネルギーである．今，エネルギー・ノルムを

$$\| u_i \| = \left(\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (9)$$

によって定義すれば，Navierの方程式の微分作用素の自己共役性により，γ をある正の定数として

$$\|u_i\| \leqq \frac{1}{\gamma}\| u_i \| \qquad (10)$$

が成立し，式(6)(9),(10)により

$$\|u_i - u^*_i\| \leqq \frac{1}{\gamma}\| u_i - u^*_i \| = \sqrt{2(J_p - J^*)} \qquad (11)$$

が得られる．

最小コンプレメンタリ・エネルギー原理は

$$-J_c[\sigma'_{ij}] = \frac{1}{2}\int_v \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}dv - \int_{S_u} t'_i \hat{u}_i ds \qquad (12)$$

を付帯条件

$$\varepsilon'_{ij} = C_{ijkl}\sigma'_{kl} \tag{13}$$

$$\sigma'_{ij,j} + \hat{f}_i = 0 \tag{14}$$

$$t'_i = \hat{t}_i \qquad S_\sigma \text{ 上で} \tag{15}$$

のもとで最小にすることである．式(12)の ε'_{ij} は必ずしも適合条件の満足しない歪である．前と同様に恒等式

$$-\frac{1}{2}\int_v(\sigma'_{ij}-\sigma^*_{ij})(\varepsilon'_{ij}-\varepsilon^*_{ij})dv = \frac{1}{2}\int_v\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}dv - \int_v\hat{f}_i u^*_i dv$$
$$-\int_{S_\sigma}\hat{t}_i u^*_i ds - \int_{S_u} t'_i\hat{u}^*_i ds + \frac{1}{2}\int_v\sigma^*_{ij}\varepsilon^*_{ij}dv \tag{16}$$

を用いることにより，式(12)は

$$J_c - J^* = -\frac{1}{2}\int_v(\sigma'_{ij}-\sigma^*_{ij})(\varepsilon'_{ij}-\varepsilon^*_{ij})dv \tag{17}$$

と書き換えられる．正解に関する力学量は変分に関して定数と考えられ，式(6)の J_p および式(17)の J_c の停留条件は それぞれ

$$\int_v(\sigma_{ij}-\sigma^*_{ij})\varepsilon_{ij}dv = 0 \tag{18}$$

$$\int_v(\varepsilon'_{ij}-\varepsilon^*_{ij})\sigma'_{ij}dv = 0 \tag{19}$$

に等価である．式(6)(17)(18)(19)とグリーンの定理を用いることにより

$$2J^* = J_p + J_c - \left[\int_v(u'_i-u_i)\hat{f}^*_i dv + \int_{S_\sigma}\hat{t}_i(u'_i-u_i)ds\right] \tag{20}$$

が導びかれる．u'_i は ε'_{ij} に対応する一般には不連続な変位場である．式(20)は相補な変分原理による近似解を用いることにより，与えられた問題の正解に対応するポテンシャル・エネルギー J^* を求め得ることを示していると考えられる．J^* が求められた場合，式(11)と Mikhlin によって示された方法により，近似解の誤差 $\| u_i-u^*_i \|$ を比較的高い精度で求めることが可能である．また，u_i と σ'_{ij} が連続な場合

$$\int_v(\sigma_{ij}-\sigma^*_{ij})(\varepsilon_{ij}-\varepsilon^*_{ij})dv \geq 0, \quad \int_v(\sigma'_{ij}-\sigma^*_{ij})(\varepsilon'_{ij}-\varepsilon^*_{ij})dv \geq 0$$

であるから 式(6)(17)より J^* の上下界

$$J_c \leq J^* \leq J_p \tag{21}$$

が容易に求められる．

3. 鞍点型の変分原理に関する考察

Hellinger-Reissner の変分原理を例として，鞍点型の変分原理について考察する．Hellinger-Reissner の変分原理の汎関数は．

$$J_R[u_i,\sigma_{ij}] = \int_v\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j}+u_{j,i}) - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \hat{f}_i u_i\right]dv - \int_{S_\sigma}\hat{t}_i u_i ds - \int_{S_u} t_i(u_i-\hat{u}_i)ds \tag{22}$$

付帯条件は
$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{23}$$

である． Navier の方程式 $E_{ijkl}u^*_{k,lj} + \hat{f}_i = 0$ と Green の定理を用いることにより

$$J_R - J^* = -\frac{1}{2}\int_v(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})E_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-u_{k,l})dv + \frac{1}{2}\int_v(u_{i,j}-u^*_{i,j})E_{ijkl}(u_{k,l}-u^*_{k,l})dv - \int_{S_u}(t_i-t^*_i)(u_i-\hat{u}_i)ds \tag{24}$$

または

$$J_R - J_p = -\left[\frac{1}{2}\int_v(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})E_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-u_{k,l})dv + \int_{S_u}(t_i-t^*_i)(u-\hat{u}_i)ds\right] \tag{25}$$

式(24)に示すように J_R-J^* の正負は一定には定まらないが，式(25)の右辺の［ ］内は常に正であるので，$J_R[u_i,\sigma_{ij}]$ と $J_p[u_i]$ の u_i として同一の近似式を用いた場合，$J_R-J^* \leq J_p-J^*$ の関係が成り立つ．u_i を S_u 上では $u_i=\hat{u}_i$ となるように選べば，式(11)と同様に式(24)から 次式が導びかれ，Mikhlin の誤差評価法が適用可能となる．

$$\| u_i-u^*_i \| \leq \frac{1}{\gamma}| u_i-u^*_i | = \sqrt{2(J_R-J^*) + \int_v(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})E_{ijkl}(\varepsilon_{ij}-u_{k,l})dv} \tag{26}$$

4．あとがき

正解 u^*_i に対応するポテンシャル・エネルギー J^* とし，Mikhlin は最小ポテンシャル・エネルギー原理により精密な u_i の近似式を適用して求めたポテンシャル・エネルギー J_p を用いているが，本文では，双対変分原理を用いて，J^* を求める方法を述べ，最小ポテンシャル・エネルギー原理および代表的な鞍点型の変分原理である Hellinger-Reissner の原理による近似解の誤差評価法を説明した．また，ポテンシャル・エネルギーに関して，Hellinger-Reissner の原理は最小ポテンシャル・エネルギー原理より良い近似を与えることを理論的に示した．

参考文献 1) Oden, J. T. and Reddy, J. N., Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer-Verlag, 1976.
2) Kantrovich, L. V. and Krylov, V. I., Approximate Methods of Higher Analysis, Interscience Publishers, pp. 327-357, 1964.
3) Mikhlin, S. G., Variational Methods in Mathematical Physics, Pergamon Press, pp. 332-391, 1964.