

複素変数法による二次元応力問題の解法

一等角写像関数の決定

東北大学 ⑤ 湯沢 昭
学 中田 恭義

1. 序論

二次元応力問題の解法には、種々の方法があるが、今回は、複素変数法を用い解析を行う。この場合の問題点は、領域を単位円内に写像する際の写像関数の決定にある。写像関数が定まれば、境界条件より複素応力関数が決定し、応力が求まる。従って写像関数の決定法として逐次変形法を用い、2, 3 の単連結有限領域の解析例を示す。尚、解析例は東北大学大型計算機センターを利用した。

2. 等角写像関数の決定

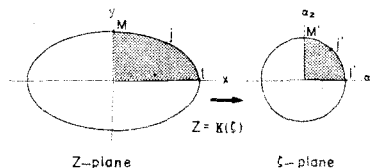
単連結有限領域を単位円の内部に写像する関数 $K(z)$ は、次の形で表現される。

$$Z = K(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m(n-1)+1} \quad (2.1)$$

$$Z = x + iy, \quad z = \rho e^{i\theta} \quad (\rho \leq 1)$$

a_n : 一般に零でない複素数係数

m : 正定数



(2.1)式において $\rho=1$ とし、実部と虚部を分離すると

$$x_j = \sum_{n=1}^M a_n \cos \{m(n-1)+1\} \theta_j \quad (2.2)$$

$$y_j = \sum_{n=1}^M a_n \sin \{m(n-1)+1\} \theta_j$$

となる。(図2.1)より(2.2)式は、次のようになる。

$$a_1 = \frac{1}{2} (x_1 + \gamma_M / \sin^{\pi/m}) - \sum_{n=3,5,7,\dots} a_n$$

$$a_2 = \frac{1}{2} (x_1 - \gamma_M / \sin^{\pi/m}) - \sum_{n=4,6,8,\dots} a_n$$

(2.3)式を(2.2)式に代入し整理すると(ただし $J=2, 3, \dots, M-1$)

$$\begin{aligned} \sum_{n=3,5,7,\dots} a_n [\cos \{m(n-1)+1\} \theta_j - \cos \theta_j] + \sum_{n=4,6,8,\dots} a_n [\cos \{m(n-1)+1\} \theta_j - \cos (m+1) \theta_j] \\ + \frac{1}{2} (x_j + \gamma_M / \sin^{\pi/m}) \cos \theta_j + \frac{1}{2} (x_1 - \gamma_M / \sin^{\pi/m}) \cos (m+1) \theta_j - x_j = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=3,5,7,\dots} a_n [\sin \{m(n-1)+1\} \theta_j - \sin \theta_j] + \sum_{n=4,6,8,\dots} a_n [\sin \{m(n-1)+1\} \theta_j - \sin (m+1) \theta_j] \\ + \frac{1}{2} (x_j + \gamma_M / \sin^{\pi/m}) \sin \theta_j + \frac{1}{2} (x_1 - \gamma_M / \sin^{\pi/m}) \sin (m+1) \theta_j - y_j = 0 \end{aligned}$$

となる。(2.4)式は、 $(M-2)$ 元超越方程式のため、次のように考えNewtonの逐次近似法を用い、 a_n, θ_j を決定する。

$$f_j(a_n, \theta_j) = 0, \quad g_j(a_n, \theta_j) = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{すなわち} \sum_{n=3,5,7,\dots} \frac{\partial f_j}{\partial a_n} a_n + \frac{\partial f_j}{\partial \theta_j} \theta_j + f_j = 0, \quad \sum_{n=4,6,8,\dots} \frac{\partial g_j}{\partial a_n} a_n + \frac{\partial g_j}{\partial \theta_j} \theta_j + g_j = 0 \quad (2.6)$$

となる。しかるに、(2.6)式の連立方程式を解くに当たって、 a_n, θ_j の初期値が必要となる。次の初期値設定に関して述べる。Z平面の領域は、円に近いかとなる。(図2.2参照) j点とj'点に写像され近似的に $\alpha_j = \theta_j$ となる。

従って θ_j の初期値として α_j の値を用い(2.4)式より a_n を求める。第2の近似値として(2.6)式より $\Delta a_n, \Delta \theta_j$ を求め

$$[a_n]_2 = [a_n]_1 + \Delta a_n, \quad [\theta_j]_2 = [\theta_j]_1 + \Delta \theta_j \quad (2.7)$$

とし、(2.5)式が満足するまで繰返す。(2.5)式が満足されたら、Z平面の領域を变形(この時の θ_j の初期値は前回の領域の θ_j を使用)して、求めようとする領域に近付ける。(図2.3参照)

3. 複素応力関数の一般式と境界条件

複素応力関数は次の形で表現される。

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \quad (3.1)$$

α_n, β_n : 一般に零でない複素数係数, $z = x_1 + iy_1 = \rho e^{i\theta}$

曲線座標系 α_1, α_2 に沿う応力、 $T_{\theta\theta}, T_{\theta r}, T_{r\theta}$ と複素応力関数の関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi} &= 4\operatorname{Re}\{\bar{\psi}(\zeta)\} \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + 2i\sigma_{\theta\varphi} &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \kappa(\zeta)} \{ \kappa(\zeta) \bar{\psi}(\zeta) + \kappa'(\zeta) \psi(\zeta) \} \\ \psi(\zeta) &= \varphi(\zeta)/\kappa(\zeta), \quad \bar{\psi}(\zeta) = \bar{\psi}'(\zeta)/\kappa'(\zeta) \end{aligned} \quad (3.2)$$

境界に応力が指定されている場合の境界条件式は次のようになる。

$$\varphi(\sigma) + \overline{\kappa(\sigma) \varphi(\sigma)} = \psi(\sigma) + \bar{\psi}(\sigma) = H(\sigma), \quad \sigma = e^{i\theta} \quad (\rho=1) \quad (3.3)$$

(3.3) 式の右辺は $[0 \leq \theta \leq 2\pi]$ の区間で複素 1-リ工級数に展開する。

$$\begin{aligned} H(\sigma) &= h_1(\theta) + ih_2(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sigma^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta} \\ A_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{h_1(\theta) + ih_2(\theta)\} e^{-in\theta} d\theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

(3.1)(3.4) 式を (3.3) 式に代入し整理すると、境界条件式は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sigma^n + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sigma^{-n} \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sigma^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sigma^n \quad (3.5)$$

$$\kappa(\sigma)/\kappa'(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sigma^{-n}$$

(3.5) 式の両辺の指数関数の係数を等置すると、 α_n, β_n も未知数とする連立方程式が得られる。

4. 応力の計算 曲線座標系 α, α_2 に沿う応力は (3.2) 式より

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi} &= 4\operatorname{Re}\{\bar{\psi}(\zeta)\} = 4\operatorname{Re}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \zeta^n\right\} \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + 2i\sigma_{\theta\varphi} &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \kappa(\zeta)} \{ \kappa(\zeta) \bar{\psi}(\zeta) + \kappa'(\zeta) \psi(\zeta) \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n e^{in\theta} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \zeta^n &= \bar{\psi}(\zeta), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2} \frac{\kappa(\zeta)}{\kappa'(\zeta)} \bar{\psi}(\zeta), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n e^{in\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2} \frac{\kappa'(\zeta)}{\kappa(\zeta)} \psi(\zeta) \end{aligned} \quad (4.1)$$

(4.1) 式より実数部及び虚数部を分離すると、各応力は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (4D_n \rho^n + F_n + H_n) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n + H_n) \cos n\theta \right\} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (4D_n \rho^n - F_n - H_n) \cos n\theta - \sum_{n=1}^{\infty} (F_n + H_n) \cos n\theta \right\} \\ \sigma_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (F_n + H_n) \sin n\theta - \sum_{n=1}^{\infty} (F_n + H_n) \sin n\theta \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

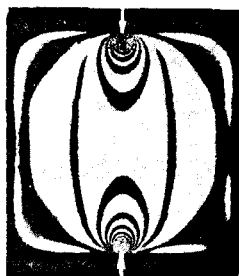
5. 解析例 (表 5.1) は (図 2.3) に示した例の写像関数係数である。この場合 (4.1) 式は、次のようになる。

$$\zeta = \kappa(\zeta) = \sum_{n=1}^m a_n \zeta^{2n-1} \quad (m=2)$$

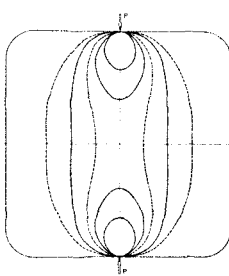
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
$b=1.0$	1.0									
$=0.9$	0.944768	0.049301	0.005131	0.000668	0.000098	0.000020				
$=0.8$	0.878180	0.094105	0.020048	0.005324	0.001583	0.000502	0.000168	0.000057	0.000022	0.000011
$=0.7$	0.799403	0.129118	0.041139	0.016243	0.007209	0.003376	0.001712	0.000862	0.000537	0.000401
$=0.6$	0.708484	0.149522	0.061843	0.031148	0.018035	0.010645	0.007362	0.004622	0.004276	0.004063

(表 5.1)

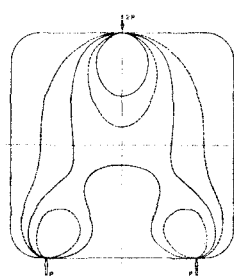
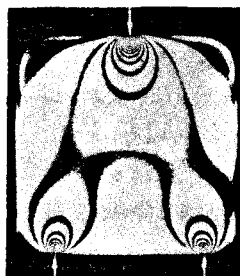
(図 5.1)(図 5.2) は、正方形に 2 点及び 3 点集中荷重の光弾性写真と複素変数法を用いた計算、光弾性線(等主応力差線図)に相当する図である。



(図 5.1)



(図 5.2)



参考文献 (1) Gotoh, K: A Numerical Method for Determining the Mapping Function for Some Simply-Connected Regions, Theor. Appl. Mech., Vol. 21, 1971 (2) 前次成一郎, 弾性学, 森北出版, (3) 玉手統, 弾性体の変形, 工研社