

1. はじめに 流れにおけるシルト粒子に代表される浮遊砂の分散過程を検討する方法として、浮遊砂の輸送・分散を表わす偏微分方程式に本文(8)式で定義されるAris Moment Transformationsを導入して得られた式の数値解を求めるのが効率的である¹⁾。本文では、開水路の一樣二次元断面流における瞬間点源の浮遊砂の分散について、点源位置、河床の条件(吸収または反射)、河床砂のentrainment rate、河面速度等の変化による分散過程の変化を検討したものである。

2. 基礎方程式 一樣二次元断面流における浮遊砂の輸送と分散を表わす偏微分方程式は、質量保存則のもとで次式で表わされる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(E_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + V_s \frac{\partial C}{\partial y} + E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

上式において、局所流速 U は水路内の平均流速 $\bar{U}$ と速度分布を示す変数 $\chi(y)$ とにより $U(y) = \bar{U}[1 + \chi(y)]$ 、局所渦動拡散係数 E_y は D と流れの全水深にわたって平均した拡散係数として $E_x = E_y = D \psi(y)$ と表わす。そこで次式で表わされる無次元パラメーターを導入する。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (x - \bar{U}t) / y_n \quad (\text{主流方向位置}) \\ \eta &= y / y_n \quad (\text{垂直方向位置}) \\ \tau &= Dt / y_n^2 \quad (\text{時間}) \\ \mu &= \bar{U} y_n / D \quad (\text{平均流速}) \\ \nu_s &= V_s y_n / D \quad (\text{沈降速度}) \\ C(\xi, \eta, \tau) &= (y_n^2 / M) C(x, y, t) \quad (\text{濃度}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで M は水路内に入らぬ浮遊砂の単位幅当りの重量で、 y_n は等流水深である。(以下、(2)式は次式となる。

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \mu \chi \frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\psi \frac{\partial C}{\partial \eta} + \nu_s C \right) + \psi \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

上式に対する瞬間点源の初期条件は点源位置 $\xi = 0$ 、 $\eta = \eta_0$ とすると次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \tau = 0 : C(\xi, \eta, 0) &= 0 \quad \text{for } \xi \neq 0 \\ C(0, \eta, 0) &= 0 \quad \text{for } \eta \neq \eta_0 \\ C(0, \eta_0, 0) &= 1 \quad \text{for } \eta = \eta_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 C(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また水表面と河床に対する境界条件は次式で表わす。

$$\eta = 1 : \psi \frac{\partial C}{\partial \eta} + \nu_s C = 0, \quad \eta = 0 : \psi \frac{\partial C}{\partial \eta} + (1 - \alpha) \nu_s C + \tau W = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

Moment	Desired statistical parameter	Formula
0	Area under curve, A	$A_S(\eta, \tau) = C_0(\eta, \tau)$ $A_S(\tau) = m_0(\tau)$ $A_W(\tau) = W_0(\tau)$ $A_T(\tau) = m_0(\tau) + W_0(\tau) \times 1$ Average velocity, $\bar{\mu}$, of dispersant at time τ relative to a system moving at velocity μ $\bar{\mu}_S(\tau) = \frac{1}{m_0} \int_0^1 \mu \times C_0 d\eta$ $\bar{\mu}_T(\tau) = m_0 \bar{\mu}_S - W_0 \mu$
1	Mean displacement, $\bar{\xi}$, from $\xi = 0$	$\bar{\xi}_S(\eta, \tau) = C_1/C_0$ $\bar{\xi}_S(\tau) = m_1/m_0$ $\bar{\xi}_W(\tau) = W_1/W_0$ $\bar{\xi}_T(\tau) = m_1 + W_1$
2	Variance, σ_ξ^2	$\sigma_{\xi S}^2(\eta, \tau) = C_2/C_0 - [\bar{\xi}_S(\eta, \tau)]^2$ $\sigma_{\xi S}^2(\tau) = m_2/m_0 - [\bar{\xi}_S(\tau)]^2$ $\sigma_{\xi W}^2(\tau) = W_2/W_0 - [\bar{\xi}_W(\tau)]^2$ $\sigma_{\xi T}^2(\tau) = m_2 + W_2 - [\bar{\xi}_T(\tau)]^2$
3	Skew coefficient, S	$S_S(\eta, \tau) = \frac{C_3/C_0 - 3 \bar{\xi}_S(\eta, \tau) C_2/C_0 + 2 [\bar{\xi}_S(\eta, \tau)]^3}{[\sigma_{\xi S}^2(\eta, \tau)]^{3/2}}$ $S_S(\tau) = \frac{m_3/m_0 - 3 \bar{\xi}_S(\tau) m_2/m_0 + 2 [\bar{\xi}_S(\tau)]^3}{[\sigma_{\xi S}^2(\tau)]^{3/2}}$ $S_W(\tau) = \frac{W_3/W_0 - 3 \bar{\xi}_W(\tau) W_2/W_0 + 2 [\bar{\xi}_W(\tau)]^3}{[\sigma_{\xi W}^2(\tau)]^{3/2}}$ $S_T(\tau) = \frac{m_3 + W_3 - 3 \bar{\xi}_T(\tau) (m_2 + W_2) + 2 [\bar{\xi}_T(\tau)]^3}{[\sigma_{\xi T}^2(\tau)]^{3/2}}$
4	Kurtosis, K	$K_S(\eta, \tau) = \frac{C_4/C_0 - 4 \bar{\xi}_S(\eta, \tau) C_3/C_0 + 6 [\bar{\xi}_S(\eta, \tau)]^2 C_2/C_0 - 3 [\bar{\xi}_S(\eta, \tau)]^4}{[\sigma_{\xi S}^2(\eta, \tau)]^2}$ $K_S(\tau) = \frac{m_4/m_0 - 4 \bar{\xi}_S(\tau) m_3/m_0 + 6 [\bar{\xi}_S(\tau)]^2 m_2/m_0 - 3 [\bar{\xi}_S(\tau)]^4}{[\sigma_{\xi S}^2(\tau)]^2}$ $K_W(\tau) = \frac{W_4/W_0 - 4 \bar{\xi}_W(\tau) W_3/W_0 + 6 [\bar{\xi}_W(\tau)]^2 W_2/W_0 - 3 [\bar{\xi}_W(\tau)]^4}{[\sigma_{\xi W}^2(\tau)]^2}$ $K_T(\tau) = \frac{m_4 + W_4 - 4 \bar{\xi}_T(\tau) (m_3 + W_3) + 6 [\bar{\xi}_T(\tau)]^2 (m_2 + W_2) - 3 [\bar{\xi}_T(\tau)]^4}{[\sigma_{\xi T}^2(\tau)]^2}$

表-1 統計量

ここに α は河床吸収係数、 γ は entrainment rate で、 W は $W(\xi, \tau) = (y_n/M)W(x, t)$ で示される河床面 α 単位幅当りの局所的な貯留にある浮遊砂の量である。また (5) 式で示された境界条件とともに堆積分布関数の $W(\xi, \tau)$ に対する式が必要となる。

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \mu \frac{\partial W}{\partial \xi} = \alpha v_s C(\xi, 0+, \tau) - \gamma W \quad \dots\dots\dots (6)$$

上式に対する初期条件は $W(\xi, 0) = 0$ である。浮遊砂に対する質量保存則はそのシステム内の浮遊砂の全量が変わらないことが必要である。すなわち次式が成立しなければならない。

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi, \tau) d\xi = 1 \quad \dots\dots\dots (7)$$

次に次式で定義される Aris Moment Transformations を導入すると (1) 式は (9) 式のように変換される。

$$C_p(\eta, \tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \xi^p C(\xi, \eta, \tau) d\xi, \quad m_p(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} C_p(\eta, \tau) d\eta, \quad W_p \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \xi^p W(\xi, \tau) d\xi \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial C_p}{\partial \eta} = \psi \left(\psi \frac{\partial C_p}{\partial \eta} + v_s C_p \right) + p \mu \chi C_{p-1} + p(p-1) \psi C_{p-2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

また (4) 式の初期条件と (5) 式の境界条件は次式となる。

$$\tau = 0 : \left. \begin{aligned} C_p(\eta, 0) &= \delta(\eta - \eta_0) \quad \text{for } p = 0 \\ C_p(\eta, 0) &= 0 \quad \text{for } p > 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\eta = 1 : \left. \begin{aligned} \psi \frac{\partial C_p}{\partial \eta} + v_s C_p &= 0 \\ \eta = 0 : \psi \frac{\partial C_p}{\partial \eta} + (1 - \alpha) v_s C_p + \gamma W &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

同様に (6) 式に対する式は次式で表わされ、初期条件は、

$$W_p(0) = 0 \quad \text{である。}$$

$$\frac{\partial W_p}{\partial \tau} = \alpha v_s C_p(0+, \tau) - p \mu W_{p-1} - \gamma W_p = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

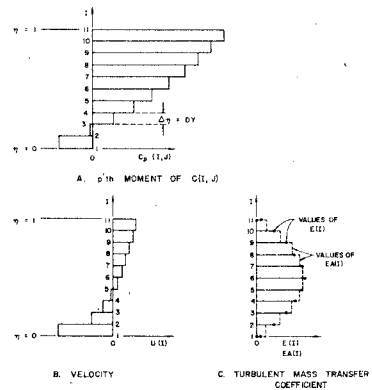


図 1 10層モデル

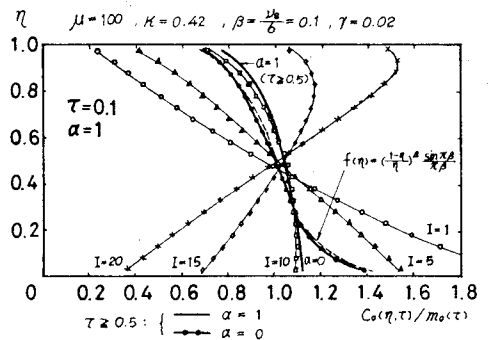


図-2 縦方向濃度分布

3. 数値計算

数値解を求めるための差分方程式に用いられる変数を図-1に10層モデルとして概略を示す。また流速分布は、von Karman-Prandtl流速分布関数 $(U - \bar{U})/U_\tau = 1/\kappa (\ln \eta + 1)$: $U_\tau = \sqrt{g y_n S_0}$, $\kappa = \text{Karman 常数}$ を用い、さらに乱れによる質量と運動量の輸送が等価であるという Reynolds analogy を用いることにより $D = \kappa / 6 y_n U_\tau$, $\psi = 6 \eta (1 - \eta)$, $\mu \chi = 6 / \kappa^2 (\ln \eta + 1)$ と表わされる。数値解は $\Delta \eta = 0.05$ の20層モデルで、 $\Delta \tau = 0.0005$ の時間間隔で $\tau = 3.0$ までおこなわれた。

4. 統計量

(9) から (12) 式より $p = 0$ から $p = 4$ に対して解き、分散による様々な様相を知るための計算をおこなった。統計量は表-1で与えられ、添字 S と W は浮遊砂の浮遊成分と堆積成分を表わし、 T は両者の合成成分を表わす。

5. 結果の一例

図-2で示されるように、縦方向濃度分布の形状は初期において点源位置に強く依存するが、文献1) 2)と同様で $\tau = 0.5$ 付近からは点源位置にかかわらず同じ分布形をもつ平衡状態に達する。黒丸で示される反射河床 ($\alpha = 0$) の平衡状態では、分布形は $f(\eta) = [(1-\eta)/\eta]^4 \sin \pi\beta/\pi\beta$ (式3) と式(1)と一致する。

参考文献: 1) William K. Soyle, "Dispersion of Silt Particles in Open Channel Flow," Proceedings, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 95, No. HY3, May 1969

2) Karel M. Atesmen, "Point Source Dispersion in Turbulent Open Channels," Proceedings, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 101, No. HY7, July 1975

3) Elder J. W., "The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow," Journal of Fluid Mechanics, Vol. 5, No. 4, 1959