(131) 不定流計算と誤差

秋田高専 正員 望月 誠美

1. まえがき

最近、非線形問題の数値計算が電算機の高能力化とともに活発となってきた。それに伴い様々な数値計算法が開発され不定流計算においても例外ではない。不定流の計算法は微分係数の差分近似を行なって解くわけであるが、その解の収束性、安定性、精度によって計算法の良否が判断される。しかし最も重要な安定性については尺度とするものがなく、計算法ごとに安定条件を提案しているにすぎない。しかもその条件は解の安定を必しも保証していない。そのため具体的な計算例によって安定であるかを判断する外方法がないのである。Priceは誤差の消長が安定性にかかわりをもつことを示した。また誤差は差分解法や繰り返し解法の計算許容誤差によって生ずると述べている。ここではこの2つの解法における誤差の計算法について考察してみることにする。

2. 不定流の基礎方程式と差分化

水路の断面形状を長方形とし、水路巾と勾配が一様な水路で摩擦抵抗をマニングの抵抗法則に従うとすれば、運動方程式、及び連続方程式は次のように書ける。

$$-i+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{n^2u^2}{R^{\frac{4}{3}}}+\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad \cdots(1) \qquad \frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \cdots(2)$$

u：平均流速　n：マニングの粗度係数　i 水路勾配　h；水深　R；径深　g 重力加速度

これを数値的に解く方法としては直接差分法、特性曲線法がある。直接差分法は(1),(2)式において微小区間、微小時間における現象を考えて、この微小の差について差分方程式をたてると

$$-i+\frac{\Delta h}{\Delta x}+\frac{u}{g}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{n^2|u|u}{R^{\frac{4}{3}}}+\frac{1}{g}\frac{\Delta u}{\Delta t}=0 \qquad \frac{\Delta h}{\Delta t}+u\frac{\Delta h}{\Delta x}+h\frac{\Delta u}{\Delta x}=0$$

となる。数値計算の方法としてはExplicit法とImplicit法に大別され、それぞれ数多く提案されている。特にImplicit法は安定性がすぐれているが、反面プログラムが複雑となるのが欠点である。特性曲線法は(1),(2)式を特性曲線方程式に導いて、特性曲線上で微分方程式として解く方法である。すなわち

$$\frac{dx}{dt}=u\pm\sqrt{gh} \qquad \frac{d(u\pm2\sqrt{gh})}{dt}=g\left(i-\frac{n^2|u|u}{R^{\frac{4}{3}}}\right)$$

となる。この式は簡単に差分化できる。この方法は解が特性曲線上に求まるため安定性に優れているという利点がある。直接差分法と同じく数値計算法としてはExplicit法とImplicit法に大別される。なお具体的な計算手法については参考文献を参照されたい。

3. 差分式による誤差

$\frac{df}{dx}$ を $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ と前進差分で代用した時の誤差はTaylorの定理を用いて容易に得られる。

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0+\theta h) \qquad より$$

$$\{f(x_0+h)-f(x_0)\}/h=f'(x_0)+\frac{h}{2}f''(x_0+\theta h)$$

したがって誤差は $\quad e=\frac{\Delta f}{\Delta x}-\frac{df}{dx}=\frac{h}{2}f''(x_0+\theta h)$

f''がこの区間$[x_0, x_0+h]$でほぼ一定であるならば

$$e \fallingdotseq \frac{h}{2} f''(x_0) \qquad \text{差分表現すれば} \qquad e \fallingdotseq \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{2h}$$

で近似的にもとまる。また後方差分及び中心差分についても同様にして求められる。

4. 連立方程式の逐次近似法による誤差

不定流計算、特にImplicit法の場合方程式の左辺右辺に未知数が存在し、連立方程式として繰り返し計算によって解かなければならない。この方法としてはガウスザイデル法が多用されている。

いま解の近似値の列を$a_1, a_2, a_3 \cdots$とすれば、$|a_n - a_{n-1}| < \varepsilon$になった時近似値$a_n$を解としている。しかし本当に知りたいのは極限値$\lim a_n = \alpha$である。この誤差を評価するには大別して個々の計算式に固有な直接的評価式を作るかa_nの傾向をもとに評価を行う2つの方法が考えられるが、前者は実用上不可能に近く、後者について検討する。

$e_n = a_n - \alpha$ が一定の割合Cで収束していくとすれば $e_n = Ce_{n-1} = C^2 e_{n-2} = \cdots\cdots$

となる。また

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= (\alpha + e_n) - (\alpha + e_{n-1}) \\ &= (\alpha + e_n) - \left(\alpha + \frac{e_n}{C}\right) \\ &= \frac{(C-1)e_n}{C} \qquad \cdots\cdots (3) \end{aligned}$$

したがって $$e_n = \frac{C(a_n - a_{n-1})}{C-1}$$

また Cを知るには

$$\begin{aligned} a_{n-1} - a_{n-2} &= (\alpha + e_{n-1}) - (\alpha + e_{n-2}) \\ &= \left(\alpha + \frac{e_n}{C}\right) - \left(\alpha + \frac{e_n}{C^2}\right) \\ &= \frac{(C-1)e_n}{C^2} \end{aligned}$$

よって(3)式との比をとれば

$$(a_{n-1} - a_{n-2}) / (a_n - a_{n-1}) = \{(C-1)e_n/C\} / \{(C-1)e_n/C^2\} = C$$

となるのでCを計算しCがほぼ一定であるならば誤差eが計算できることになる。

5. あとがき

不定流計算における誤差として、その他初期条件、境界条件に含まれる誤差があり、これが解の不安定を招く原因となることがしばしばある。また電算における数はビット表現されるのでそのため起る機械的誤差はさけられないと思う。最近1ワード32ビットの計算機が普及し、有効数字が7桁程度となり、思わぬ計算結果を得ることがあるので注意が必要である。

参考文献

1) Roland K Price; 'Comparison of Four Numerical Method for Flood Routing', Proc. of ASCE, Vol 100, NO. HY7, July 1974.

2) 伊藤 剛; 数値計算の応用と基礎, アテネ出版

3) 秋元 保; 開水路不定流解析法の特性比較と適用性についての考察, 電力中央研究所技術第2研究所報告 NO. 74006, 1975

4) 戸川 隼人; 計算機のための誤差解析の基礎, サイエンス社