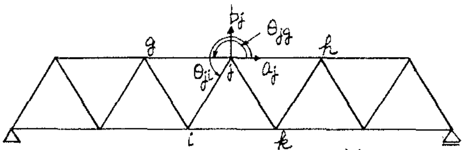
(17) トラス橋に関する解法

東北大学 正員 多谷 虎男
東北大学 学生員 村井 貞規
東北大学 学生員 ○長谷川 明

この方法は，連続体の振動解析のための Lagurange's equation[1] を使って，トラスの部材質量を質点系におき換えることなく，連続的に分布するものとして計算する方法である。

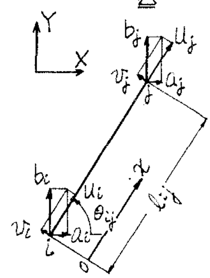
Normal Function の決定



トラス部材は，軸方向力だけが働き，軸と直角方向には剛体的振動をするので，波長 $2\pi/\gamma_r$ の時の部材 ij の normal function を次のようにおく。

$$U_{ij} = A_{ij}\cos(\gamma_r x) + B_{ij}\sin(\gamma_r x) \qquad (1)$$

$$V_{ij} = C_{ij} + D_{ij}x \qquad (2)$$



部材 ij の両端における変位を図のように，X,Y方向に分け，x の始点 $i\,(x=0)$ で (a_i, b_i)，終点 $j\,(x=l_{ij})$ で (a_j, b_j) と書けば，(1)，(2) に $x=0$，l_{ij} を代入して次の関係が得られる。

$$A_{ij} = a_i\cos\theta_{ij} + b_i\sin\theta_{ij} \qquad (3)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{\sin(\gamma_r l_{ij})}\left[\{a_j - a_i\cos(\gamma_r l_{ij})\}\cos\theta_{ij} + \{b_j - b_i\cos(\gamma_r l_{ij})\}\sin\theta_{ij}\right] \qquad (4)$$

$$C_{ij} = b_i\cos\theta_{ij} - a_i\sin\theta_{ij} \qquad (5)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{l_{ij}}\{(b_j - b_i)\cos\theta_{ij} - (a_j - a_i)\sin\theta_{ij}\} \qquad (6)$$

又，部材 ij に働く軸力は(1)より，

$$c_1^2\rho S_{ij}\frac{\partial u_{ij}}{\partial x} = c_1^2\rho S_{ij}\gamma_r\{-A_{ij}\sin(\gamma_r x) + B_{ij}\cos(\gamma_r x)\} \qquad S_{ij}：\text{部材}ij\text{の断面積} \qquad (7)$$

となり，i,j 点における ij 部材の軸力を F_{ij}，F_{ji} と書けば，(3)，(4)，(7) を使って，次のようになる。

$$F_{ij} = \frac{c_1^2\rho S_{ij}\gamma_r}{\sin(\gamma_r x)}\{(a_j\cos\theta_{ij} + b_j\sin\theta_{ij}) - (a_i\cos\theta_{ij} + b_i\sin\theta_{ij})\cos(\gamma_r l_{ij})\} \qquad (8)$$

$$F_{ji} = \frac{c_1^2\rho S_{ij}\gamma_r}{\sin(\gamma_r x)}\{-(a_i\cos\theta_{ij} + b_i\sin\theta_{ij}) + (a_j\cos\theta_{ij} + b_j\sin\theta_{ij})\cos(\gamma_r l_{ij})\} \qquad (9)$$

節点においては，質量がないため，振動の際，慣性力が働かず，これらの軸力はつりあっていなければならない。振動による部材間のなす角の変化は微少なものとすると，図における j 点において，X，Y方向について，それぞれ次の平衡条件式が得られる。

$$F_{jh}\cos\theta_{jh} + F_{jg}\cos\theta_{jg} + F_{ji}\cos\theta_{ji} + F_{jk}\cos\theta_{jk} = 0 \qquad (10)$$

$$F_{jh}\sin\theta_{jh} + F_{jg}\sin\theta_{jg} + F_{ji}\sin\theta_{ji} + F_{jk}\cos\theta_{jk} = 0 \qquad (11)$$

パネル数を n とすれば，静定トラスでは未知数は，a_i, b_i 等の節点変位が $(2n+1)\times 2-3=4n-1$ 個あり，さらに γ_r で，$4n$ 個ある。一方 (10)，(11) による平衡条件式は，$(2n+1)\times 2-3=4n-1$ 個ある。さらに (8)，(9) によって，(10)，(11) は，a_i, b_i 等の節点変位の一次項だけの方程式をなす。よって平衡条件式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1\,4n-1} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2\,4n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{4n-1\,1} & h_{4n-1\,2} & \cdots & h_{4n-1\,4n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_{4n-1}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} \qquad (12)$$

$a_i'\,(i=1,2,\cdots,4n-1)$ は $(4n-1)$ 個の未知数 a_i, b_i を示す

ここで，h_{ij}はγ_rだけの項である。(12)で，$a_1', \cdots, a_{4n-1}'$が全て0でない解をもつためには，左辺の行列の行列式が，0とならなければならない。(13式)　一般的にはγ_rが無数に求まり，又，γ_rに対する$a_1' : a_2' : \cdots : a_{4n-1}'$の比が求まる。この比を(3)～(6)へ代入して$A_{ij}$, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij} の比が求まり，これを$(A_{ij})_r$, $(B_{ij})_r$, $(C_{ij})_r$, $(D_{ij})_r$と書く。これで各部材の normal function が決定する。(14)式

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1\,4n-1} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2\,4n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{4n-1\,1} & h_{4n-1\,2} & \cdots & h_{4n-1\,4n-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (13) \qquad \begin{Bmatrix} a_2'/a_1' \\ a_3'/a_1' \\ \vdots \\ a_{4n-1}'/a_1' \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_{22} & h_{23} & \cdots & h_{2\,4n-1} \\ h_{32} & h_{33} & \cdots & h_{3\,4n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{4n-1\,2} & h_{4n-1\,3} & \cdots & h_{4n-1\,4n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} h_{21} \\ h_{31} \\ \vdots \\ h_{4n-1\,1} \end{Bmatrix} \qquad (14)$$

Structual Angular Frequency の決定

部材ij の変位成分は，Structual Angular Frequency をP_sとし，各γ_rに対する振幅比を$\bar{A}_{sr}$とすれば，次のようになる。

$$U_{ij} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \end{Bmatrix}_{ij} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{Bmatrix} \qquad \text{ここで} \quad \begin{aligned} (\alpha_{1s})_{ij} &= (A_{ij})_s \cos(\gamma_s x) + (B_{ij})_s \sin(\gamma_s x) \\ (\alpha_{2s})_{ij} &= (C_{ij})_s + (D_{ij})_s x \\ g_m &= \bar{A}_{sm} \sin(P_s t + \phi_s) \end{aligned} \qquad (15)$$

自由振動の場合，Lagurange's equation は次のようになる。[1),2)]

$$b_{rs}\ddot{g}_s + 2\zeta b_{rs}\dot{g}_s + k_{rs} g_s = 0 \quad (s \text{ は summation convention}) \qquad (16)$$

$$\begin{aligned} b_{rs} &= \iiint \beta_{rs}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \sum_{ij} \iiint \sum_k \rho \alpha_{kr} \alpha_{ks}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \rho \sum_{ij} S_{ij} \int_0^{l_{ij}} (\alpha_{1r}\alpha_{1s} + \alpha_{2r}\alpha_{2s})\, dx \\ &= \rho \sum_{ij} S_{ij} \int_0^{l_{ij}} \Big[\{ (A_{ij})_r \cos(\gamma_r x) + (B_{ij})_r \sin(\gamma_r x) \} \{ (A_{ij})_s \cos(\gamma_s x) + (B_{ij})_s \sin(\gamma_s x) \} \\ &\quad + \{ (C_{ij})_r + (D_{ij})_r x \} \{ (C_{ij})_s + (D_{ij})_s x \} \Big] dx \end{aligned} \qquad (17)$$

$$\begin{aligned} k_{rs} &= \iiint k_{rs}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \sum_{ij} S_{ij} \int_0^{l_{ij}} 2G \Big\{ \alpha_{1r,1}\alpha_{1s,1} + \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_{1r,1}\alpha_{1s,1} \Big\} dx \\ &= 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \gamma_r \gamma_s \sum_{ij} S_{ij} \int_0^{l_{ij}} \{ -(C_{ij})_r \sin(\gamma_r x) + (D_{ij})_r \cos(\gamma_r x) \} \\ &\quad \times \{ -(C_{ij})_s \sin(\gamma_s x) + (D_{ij})_s \cos(\gamma_s x) \} dx \end{aligned} \qquad (18)$$

今，$\ddot{g}_s = -\bar{A}_{ss} P_s^2 \sin(P_s t + \phi_s)$ であるから，粘性による項を無視すると，(16) は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} -P_s^2 b_{11} + k_{11} & -P_s^2 b_{12} + k_{12} & \cdots & -P_s^2 b_{1m} + k_{1m} \\ -P_s^2 b_{21} + k_{21} & -P_s^2 b_{22} + k_{22} & \cdots & -P_s^2 b_{2m} + k_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -P_s^2 b_{m1} + k_{m1} & -P_s^2 b_{m2} + k_{m2} & \cdots & -P_s^2 b_{mm} + k_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{A}_{s1} \\ \bar{A}_{s2} \\ \vdots \\ \bar{A}_{sm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

よって，(12)～(14)の操作と同様に Structual Angular Frequency P_sが求まり，$\bar{A}_{s1} : \bar{A}_{s2} : \cdots : \bar{A}_{sm}$の比が求まる。このようにして最終的に，部材ij の変位は次のように書かれ，$P_1, P_2, \cdots, P_s$の振動による振幅比と位相差ϕ_sは，質点系と同様に，初期条件によって決定される。

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \end{Bmatrix}_{ij} \begin{Bmatrix} \bar{A}_{k1} \sin(P_k t + \phi_k) \\ \bar{A}_{k2} \sin(P_k t + \phi_k) \\ \vdots \\ \bar{A}_{km} \sin(P_k t + \phi_k) \end{Bmatrix} \qquad (20)$$

両端自由の棒の振動では，直交関係が成立し，$\bar{A}_{ij} = 0\ (i \neq j)$となり，structual frequency と Original Natural frequency$(\omega_r = C_1\gamma_r)$と一致するが，この場合には，一般に，直交関係がなく，(19)を解かなければならない。このstructual frequencyというのは，いくつかの original natural frequencyが重ね合うことによる振動数である。

参考文献　多谷虎男：Tensor Wave Theory in Solid Elastic Body of Three Dimension

1) Part 6　東北大学工学報告 Vol.37, No 2　　2) Part 7　東北大学工学報告 Vol.40, No 1