

東北大学 正員 多谷 虎男
 東北大学 学生員 穂山 和男
 東北大学 学生員 〇佐々木 和男

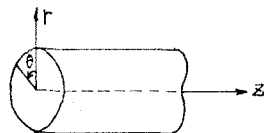
1. まえがき 振動解析法としては、構造物を要素に分割して解析する手法が多くの場合用いられてきた。本研究はそのような手法によらず、変断面三径間連続桁を連続体として解析したものである。

2. 横弾性波の位相速度曲線 丸棒中に円柱座標 (r, θ, z) を取り、スカラーポテンシャル中、ベクトルポテンシャル Ψ を次のように仮定する。

$$\Phi = U_0(r) \cos \theta \exp[i(\lambda z - pt)] \quad (1)$$

$$\Psi = \begin{Bmatrix} U(r) \sin \theta \\ V(r) \cos \theta \\ W(r) \sin \theta \end{Bmatrix} \exp[i(\lambda z - pt)] \quad (2)$$

$$\text{div } \Psi = 0 \quad (3)$$



丸棒の半径: a

図. 1

上式(1), (2)をナビエの運動方程式に代入し(3)式を用いれば、変位場 u は次式になる。

$$u = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left[\xi J_1'(kr) + \eta \gamma J_1'(kr) + \zeta \frac{J_1(kr)}{r} \right] \cos \theta \\ \left[-\xi \frac{J_1(kr)}{r} - \eta \gamma \frac{J_1(kr)}{r} - \zeta J_1'(kr) \right] \sin \theta \\ \left[\xi \lambda \gamma J_1(kr) - \eta \lambda k^2 J_1(kr) \right] \cos \theta \end{Bmatrix} \exp[i(\lambda z - pt)] \quad (4)$$

$$\text{ここに、} k = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}, \quad k = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}, \quad \xi = -\frac{A}{k^2}, \quad \eta = -\frac{B}{k^2}, \quad \zeta = \frac{C}{k^2 - \gamma^2}, \quad \gamma = \frac{p}{c}$$

$$\gamma_1 = \frac{p}{c_1}, \quad c^2 = \frac{2G}{\rho} \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right), \quad \gamma_2 = -\frac{p}{c_2}, \quad c^2 = \frac{G}{\rho}, \quad A, B, C: \text{定数}$$

この変位場 u に、丸棒の表面での境界条件式; $[U_r]_{r=a} = 0$, $[U_\theta]_{r=a} = 0$, $[U_z]_{r=a} = 0$ を適用すれば、次式を得る。

$$\begin{vmatrix} \left\{ J_1''(ka) - \frac{1}{2}(\lambda^2 - \gamma^2) J_1(ka) \right\} & - \left\{ J_1''(ka) + k^2 J_1(ka) \right\} & - J_1''(ka) \\ 2 \left\{ J_1''(ka) + k^2 J_1(ka) \right\} & - \left\{ 2 J_1''(ka) + k^2 J_1(ka) \right\} & - 2 \left\{ J_1''(ka) + k^2 J_1(ka) \right\} \\ 2 J_1'(ka) & \frac{1}{a} J_1(ka) & \frac{\lambda^2 - 2\gamma^2}{\gamma^2} J_1'(ka) \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

上式を $\left(\frac{p}{c_1}\right) \sim \left(\frac{p}{c_2}\right)$ について解けば、図2の曲線になる。この曲線が横弾性波の位相速度曲線(厳密解)である。

3. 横振動のモード曲線 図3に示された変断面三径間連続桁について解析する。一般端条件のほりの y 方向変位は、次式で表わされる。(連続桁は、かなり細長いと仮定して理論を進める。)

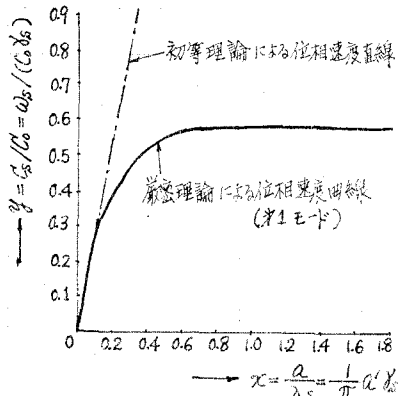
$$Y = \left\{ C_1 \cos(\gamma_1 z) + C_2 \sin(\gamma_1 z) + C_3 \cosh(\gamma_2 z) + C_4 \sinh(\gamma_2 z) \right\} \sin(pt + \phi) \quad (6)$$

ここに、 C_1, C_2, C_3, C_4 : 定数

図3の連続桁は左右対称であるから、桁の中央断面に関して、線対称はモード曲線と点対称はモード曲線が存在しうると考えられる。従って、正規関数 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 を次のように設定する。

(1). 線対称モードの場合

$$\begin{cases} Y_1 = a_1 \cos(\gamma_1 z) + a_2 \sin(\gamma_1 z) + a_3 \cosh(\gamma_2 z) + a_4 \sinh(\gamma_2 z) \\ Y_2 = b_1 \cos(\gamma_1 z) + b_2 \sin(\gamma_1 z) + b_3 \cosh(\gamma_2 z) + b_4 \sinh(\gamma_2 z) \end{cases}$$



$$C_0 = \sqrt{E/\rho} \quad \omega_0: \text{自然角振動数}$$

$$a: \text{棒の断面の回転半径}$$

図2. 横弾性波の位相速度曲線 (第1モード)

$$Y_3(z_3) = Y_1(z_1), Y_4(z_4) = Y_1(z_1)$$

(ii). 点対称モードの場合

$$\begin{cases} Y_1 = C_1 \cos(\gamma_1 z) + C_2 \sin(\gamma_1 z) + C_3 \cosh(\gamma_1 z) + C_4 \sinh(\gamma_1 z) \\ Y_2 = d_1 \cos(\gamma_2 z) + d_2 \sin(\gamma_2 z) + d_3 \cosh(\gamma_2 z) + d_4 \sinh(\gamma_2 z) \\ Y_3(z_3) = -Y_2(z_2), Y_4(z_4) = -Y_2(z_2) \end{cases}$$

(i), (ii)について, 各々境界条件を適用すれば, 変位上の

γ_s ($s=1, 2, \dots$) の値と, 各 γ_s に対応する係数比が求まる。更に, 位相速度曲線を用いて各断面での γ の値を求め, これらの値を正理関数, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 に代入すれば, 振動のモード曲線が得られる。

4. 固有振動数 ラグランジェ方程式を用いて固有振動数を求める。自由振動の場合, ラグランジェ方程式は次式である。

$$m \ddot{q}_s + 2\gamma m \dot{q}_s + K_{rs} q_s = 0 \quad (7)$$

ここで, r, s : 横振動のモード番号 q_s : s 次モードの時間項

γ : 内部摩擦による減衰係数 m : 運動エネルギーに関する量 K_{rs} : 弾性エネルギーに関する量

図4の曲線2に対応する m, K_{rs} の式を正確に誘導することは非常に煩雑になるので, 図4の直線1に対応する式を求め, その K_{rs} に低減率: $\left[\frac{Y_1(z_s)}{Y_0(z_s)} \right] \left[\frac{Y_1(x_r)}{Y_0(x_r)} \right]$ を掛ける。すなわち, 次式によって m, K_{rs} を計算する。

$$m_{rs} = \rho \int_0^L A Y_r Y_s dz \quad (8)$$

$$K_{rs} = E \int_0^L I \frac{Y_1(x_r)}{Y_0(x_r)} \frac{Y_1(z_s)}{Y_0(z_s)} \left[\frac{d^2 Y_r}{dz^2} \right] \left[\frac{d^2 Y_s}{dz^2} \right] dz \quad (9)$$

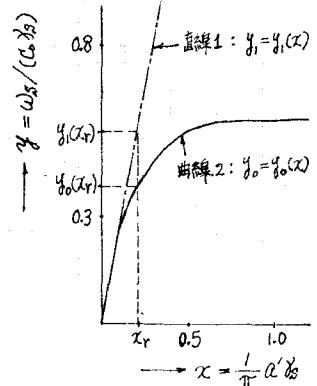
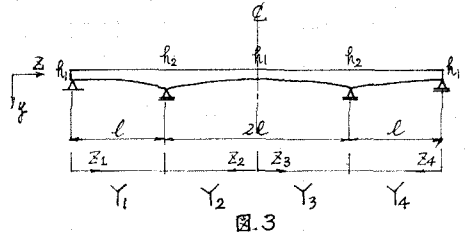
$q_s = \bar{q}_s \exp(i\gamma_s t)$ と置き, (7) 式に代入すれば, 次の振動数方程式を得る。

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} (-p^2 b_{11} + 2i\gamma p b_{11} + K_{11}) & (-p^2 b_{12} + 2i\gamma p b_{12} + K_{12}) & \dots & (-p^2 b_{1n} + 2i\gamma p b_{1n} + K_{1n}) \\ (-p^2 b_{21} + 2i\gamma p b_{21} + K_{21}) & (-p^2 b_{22} + 2i\gamma p b_{22} + K_{22}) & \dots & (-p^2 b_{2n} + 2i\gamma p b_{2n} + K_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-p^2 b_{n1} + 2i\gamma p b_{n1} + K_{n1}) & (-p^2 b_{n2} + 2i\gamma p b_{n2} + K_{n2}) & \dots & (-p^2 b_{nn} + 2i\gamma p b_{nn} + K_{nn}) \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

固有振動数 γ_s ($s=1, 2, \dots$) は上式から求まる。

5. 計算および実験 図3において, $l=25\text{ cm}$, $h_1=1.0\text{ cm}$, $h_2=1.5\text{ cm}$, 幅 1.0 cm の場合について, 計算ならびに実験を行った。結果は講演時に発表する。

参考文献 1). Toras Taya; Tensor Wave Theory in Solid Elastic Body of Three Dimension, Part 5, Part 6, Part 7, 東北大学工学報告 Vol 39, No1 (1974), Vol 39, No2 (1974), Vol 40, No.1 (1975) 2). Y, C, ファン; 固体の力学, 培風館 3). 千モシエン; 工業振動学, 東京図書



直線1: 初等理論による位相速度直線
曲線2: 厳密理論による位相速度曲線 (P1E-1)

図4