(13)　薄肉断面直線材のせん断変形を考慮した剛性マトリックス

秋田大学土木工学科　正員　稼農知徳
秋田大学土木工学科　正員　薄木征三
秋田大学土木工学科　学生員　○佐江　保

1.はじめに　本論文では、薄肉直線材の曲げおよびねじりに伴うせん断変形を考慮した剛性マトリックスを示した。その際、ひずみ成分を陽な形で表示し、仮想仕事の原理を用いて剛性マトリックスを求める手法を用いた。せん断変形の影響は、ひずみ成分に対して補正する形で考慮され、応力のつりあいを満足すべく繰り返し修正される。本文では、ひずみと断面上の任意の原点の変位で表示し、その過程において、部材軸方向変位 $\bar{w}$ の決定に主眼が置かれる。解析の際用いた基本的仮定は、[I]断面不変を保持する.[II]薄肉要素の板厚中心面に垂直で部材軸線に平行な面内でのせん断ひずみは無視する.[III]閉断面において、部材軸方向応力は、肉厚中心線上の軸応力が平均値として一定に分布するものとする. などである。[I]は一般に橋梁で用いられる部材が長さに比べ断面寸法の非常に小さいものであることより妥当であり、[II]は薄肉材を取り扱う際通常用いられる仮定である。また[III]は部材の微小要素の応力のつりあい式に適用される。

2.変位とひずみの関係　解析には、$(D-x,y,z)$ と $(C-s,n,z)$ の2つの直交座標系を用いる。ここで、D, C はそれぞれ横断面上、薄肉断面上の任意の原点とし、z は部材軸方向、s は薄肉中心線沿い、n は s と直角な肉厚方向座標である。変位は横断面原点上で (u,v,w)、薄肉断面上の任意点 $P(x,y,z)$ で $(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$ とする。任意点のひずみと変位の関係は次式を用いた。

$\varepsilon_x=\frac{\partial\bar{u}}{\partial x},\ \varepsilon_y=\frac{\partial\bar{v}}{\partial y},\ \varepsilon_z=\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}$ ----(1)a-c　　$\gamma_{xy}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial x},\ \gamma_{yz}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial y},\ \gamma_{zx}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}$ ----(2)a-c　仮定[I]より

ひずみ成分について、$\varepsilon_x=0,\ \varepsilon_y=0,\ \gamma_{xy}=0$ が成り立ち、(1)(2)式より $\bar{u}=u-y\varphi,\ \ \bar{v}=v+x\varphi$ ----(3) となる。(3)式において φ は D点での回転変位である。さて (s,n,z) 座標に関するせん断ひずみを γ_{sz}, γ_{nz} とすると、γ_{yz}, γ_{zx} は次のように変換できる。

$\gamma_{sz}=m\gamma_{yz}+l\gamma_{zx},\ \gamma_{nz}=-l\gamma_{yz}+m\gamma_{zx}$ ---(4)a,b　(4)式で l, m はそれぞれの方向余弦であり(2)式を代入して $\gamma_{sz}=\frac{\partial\bar{w}}{\partial s}+v'\frac{\partial y}{\partial s}+u'\frac{\partial x}{\partial s}+\bar{r}_s\varphi'$ ---(5)

$\gamma_{nz}=\frac{\partial\bar{w}}{\partial n}+v'\frac{\partial y}{\partial n}+u'\frac{\partial x}{\partial n}+\bar{r}_n\varphi'$ ---(6) となる。(5)(6)式において $(\ )'$ は $\frac{\partial}{\partial z}$ を表わし、$\bar{r}_s$ $\bar{r}_n$ は任意点Pの s 方向、n 方向へのD点よりの垂線の長さである。仮定[II]は $\gamma_{nz}=0$ を表わしそれを(6)式に適用し n について積分すると $\bar{w}=C(s)-v'y-u'x-\bar{r}_n\cdot n\varphi'$ ----(7), $C(s)$ は積分定数である。ここで微小要素 $t\,ds\,dz$ の応力のつりあいを考えると外力を無視して $\frac{\partial}{\partial s}(\tau_{sz}^*\cdot t)+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_z\,dn\right\}=0$ となる。これを s について積分し、仮定[III]を用いると $\gamma_{sz}^*=\frac{g_1}{Gt}-\frac{1}{Gt}\int_{s_1}^{s}\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z^*\cdot t)\,ds$ ----(8) となる。* は肉厚中心線に関するものを表わし、g_1 は積分定数である。(8)式においてまず $\sigma_z^*=0$ と仮定し $\gamma_{sz}^*=\frac{g_1}{Gt}$ ---(9) とおく。こうして求めた $\bar{w}$ より σ_z^* を決め、再び(8)式にもどって修正する。(5)式より求められる γ_{sz}^* と(9)式より $\frac{\partial\bar{w}^*}{\partial s}=\frac{g_1}{Gt}-v'\frac{\partial y^*}{\partial s}-u'\frac{\partial x^*}{\partial s}-\bar{r}_s^*\varphi'$ ---(10) となる。(10)式において g_1 は変位の連続条件より求まる。すなわち $\oint\frac{\partial\bar{w}^*}{\partial s}ds=0$ に代入すると $g_1=G\left(\oint\bar{r}^*ds\Big/\oint\frac{ds}{t}\right)\cdot\varphi'$ ---(11)。また(7)式より $n=0$ とおいて求められる $\bar{w}^*$ を(10)式に代入すると $\frac{\partial C(s)}{\partial s}=\frac{g_1}{Gt}-\bar{r}_s^*\varphi'$ ---(12) となる。(12)式を s で積分したものに(11)式を代入し、さらにそれを(7)式の $C(s)$ と置き換えると変位 $\bar{w}$ は次式になる。$\bar{w}=C_0-v'y-u'x-(\omega^*+\bar{r}_n\cdot n)\varphi'$ ---(13)。(13)式において $\omega^*=\int_0^s\left\{\bar{r}_s^*-\left(\oint\bar{r}_s^*ds\Big/\oint\frac{ds}{t}\right)\frac{1}{t}\right\}ds$ ---(14) であり、また積分定数 C_0 を求めるため C−D 間を $t=0$ の仮想薄板で結ぶ。これにより(13)式は D点についても成り立ちそれを w とし $C_0=w+\int_0^{s_0}\bar{r}_s^*ds\cdot\varphi'$ となる。従って(13)式より $\bar{w}=w-v'y-u'x-\omega\varphi'$ ---(15) となり、ここで $\omega=\omega^*+\bar{r}_n\cdot n-\int_0^{s_0}\bar{r}_s^*ds$ ---(16) である。(16)式の積分項は C−D に沿っての積分を表わし、それはそり体積ゼロ、すなわち $\int_F\omega\,dF=0$ を満たすよう ω を選ぶことにより求まる。それを(16)式に代入し、新たに $\omega=\omega^*+\bar{r}_n\cdot n-\frac{1}{F}\int_F(\omega^*+\bar{r}_n\cdot n)\,dF$ ---(17) とおくと変位 $\bar{w}$ は(15)式で表わされる。さてここで(8)式にもどって直応力 σ_z^* を考慮した上でのひずみ成分の修正を行う。(15)式より $\sigma_z^*=E\varepsilon_z^*=E\frac{\partial\bar{w}^*}{\partial z}=E(w'-y^*v''-x^*u''-\omega^*\varphi'')$ となる。これを(8)式に代入し、同様な手順を繰り返すと $\bar{w}=w-v'y-u'x-\omega\varphi'-\frac{E}{G}(B_f w''-B_x v'''-B_y u'''-B_\omega\varphi''')$ --(18) となる。従ってひずみ成分 ε_z, γ_{sz} は次式になり、他のひずみ成分はゼロである。$\varepsilon_z=w'-yv''-xu''-\omega\varphi''-\frac{E}{G}(B_f w'''-B_x v^{\mathrm{IV}}-B_y u^{\mathrm{IV}}-B_\omega\varphi^{\mathrm{IV}})$ ---(19)　$\gamma_{sz}=\Theta\varphi'-\frac{E}{Gt}(S_f w''-S_x v'''-S_y u'''-S_\omega\varphi''')$ ---(20)

(20)式で Θ は開断面では $-2n$、閉断面では $\left(\oint\bar{r}_s^*ds\Big/\oint\frac{ds}{t}\right)\frac{1}{t}-2n$ となり、(18)(19)(20)で $B_f\sim B_\omega$, $S_f\sim S_\omega$ は次のように定義した。

$B_f=\int_0^s\frac{S_f}{t}ds,\ \ B_x=\int_0^s\frac{S_x}{t}ds,\ \ B_y=\int_0^s\frac{S_y}{t}ds,\ \ B_\omega=\int_0^s\frac{S_\omega}{t}ds,\ \ S_f=S_{f0}-S_{f1},\ \ S_x=S_{x0}-S_{x1},\ \ S_y=S_{y0}-S_{y1},\ \ S_\omega=S_{\omega0}-S_{\omega1},$

$S_{f1}=\oint\frac{S_{f0}}{t}ds\Big/\oint\frac{ds}{t},\ S_{x1}=\oint\frac{S_{x0}}{t}ds\Big/\oint\frac{ds}{t},\ S_{y1}=\oint\frac{S_{y0}}{t}ds\Big/\oint\frac{ds}{t},\ S_{\omega1}=\oint\frac{S_{\omega0}}{t}ds\Big/\oint\frac{ds}{t},\ S_{f0}=\int_{s_1}^{s}t\,ds,\ S_{x0}=\int_{s_1}^{s}y^*t\,ds,\ S_{y0}=\int_{s_1}^{s}x^*t\,ds,\ S_{\omega0}=\int_{s_1}^{s}\omega^*t\,ds$ ---(21)

3.直線材の剛性マトリックス　断面上の任意点Dの変位 u, v, w, φ を次の5次のべき級数で近似する。

$$\left.\begin{aligned}
u &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5\\
v &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + b_5 z^5\\
w &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3\\
\varphi &= d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + d_4 z^4 + d_5 z^5
\end{aligned}\right\}\text{---(22)a-d}$$

左式で $a_0 \sim a_5$, - - - -, $d_0 \sim d_5$ は未定係数である。u, v, w, φ の基本変位の他に自由度として次のものを考える。

$$\left.\begin{aligned}
&\tau_x = v', \quad \tau_y = u', \quad \tau_z = \varphi'\\
&\varepsilon_z = w', \quad \kappa_x = v'', \quad \kappa_y = u'', \quad \theta_z = \varphi''
\end{aligned}\right\}\text{---(23)a-g}$$

今,梁要素の両端を $i\,(z=0)$ および $j\,(z=\ell)$ とし,基本変位に各々添字 i, j を付け次のように定義する。

$\{u\}_{z=0} = [u_i, v_i, w_i, \varphi_i]^T$　$\{u\}_{z=\ell} = [u_j, v_j, w_j, \varphi_j]^T$　さらに,(23)式によって他の自由度も添字 i, j を付けて表わす。これらを(22)式に代入すると未定係数が求まり,基本変位 u, v, w, φ はあらたに次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
u &= N_1 u_i + N_2 u_j + N_3 \tau_{yi} + N_4 \tau_{yj} + N_5 \kappa_{yi} + N_6 \kappa_{yj}\\
v &= N_1 v_i + N_2 v_j + N_3 \tau_{xi} + N_4 \tau_{xj} + N_5 \kappa_{xi} + N_6 \kappa_{xj}\\
w &= N_7 w_i + N_8 w_j + N_9 \varepsilon_{zi} + N_{10} \varepsilon_{zj}\\
\varphi &= N_1 \varphi_i + N_2 \varphi_j + N_3 \tau_{zi} + N_4 \tau_{zj} + N_5 \theta_{zi} + N_6 \theta_{zj}
\end{aligned}\right\}\text{---(24)a-d}$$

ここで係数 $N_1 \sim N_{10}$ は次式である。

$N_1 = 1 - \frac{10}{\ell^3}z^3 + \frac{15}{\ell^4}z^4 - \frac{6}{\ell^5}z^5$, $N_2 = \frac{10}{\ell^3}z^3 - \frac{15}{\ell^4}z^4 + \frac{6}{\ell^5}z^5$, $N_3 = z - \frac{6}{\ell^2}z^3 + \frac{8}{\ell^3}z^4 - \frac{3}{\ell^4}z^5$,
$N_4 = -\frac{4}{\ell^4}z^3 + \frac{7}{\ell^3}z^4 - \frac{3}{\ell^4}z^5$, $N_5 = \frac{1}{2}z^2 - \frac{3}{2\ell}z^3 + \frac{3}{2\ell^2}z^4 - \frac{1}{2\ell^3}z^5$, $N_6 = \frac{1}{2\ell}z^3 - \frac{1}{\ell^2}z^4 + \frac{1}{2\ell^3}z^5$,
$N_7 = 1 - \frac{3}{\ell^2}z^2 + \frac{2}{\ell^3}z^3$, $N_8 = \frac{3}{\ell^2}z^2 - \frac{2}{\ell^3}z^3$, $N_9 = z - \frac{2}{\ell}z^2 + \frac{1}{\ell^2}z^3$, $N_{10} = -\frac{1}{\ell}z^2 + \frac{1}{\ell^2}z^3$,

一般にある系の内部ひずみエネルギー Π_i は,仮想ひずみを*を付して表わすと,次のようにマトリックス表示される。

$\Pi_i = \iiint \{\varepsilon^*\}\{\sigma\}\,dx\,dy\,dz$ ---(25)　ここで $\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T$,　$\{\varepsilon^*\} = [\varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \varepsilon_z^*, \gamma_{xy}^*, \gamma_{yz}^*, \gamma_{zx}^*]^T$ である。

本論文では,ε_z, γ_{sz} のみが生じその他のひずみ成分はゼロだから(25)式において,$\{\varepsilon^*\} = [\varepsilon_z, \gamma_{sz}]^T$, $\{\sigma\} = [\sigma_z, \tau_{sz}]$ となる。さらに,ひずみと変位の関係 $\{\varepsilon^*\} = [B]\{\delta^*\}$, および応力とひずみの関係 $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\}$ を(25)式に代入することにより,内部ひずみエネルギーは次式になる。　$\Pi_i = \iiint \{\delta^*\}^T [B]^T [D][B]\{\delta\}\,dx\,dy\,dz$ ---(26)　一方,外部ひずみエネルギーは,外力を $\{P\}$ として次式で与えられる。　$\Pi_a = \{\delta^*\}\{P\}$ ---(27)　(26),(27)で $[B]$ は(24)を(19)(20)に代入して得られ $[D]$, $[P]$, $\{\delta\}$ は次式である。

$$[D] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$$

$$\{P\} = [Q_{xi}, Q_{yi}, N_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, T_{zi}, M_{\omega i}, 0, 0, 0, 0, Q_{xj}, Q_{yj}, N_{zj}, M_{xj}, M_{yj}, T_{zj}, M_{\omega j}, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$\{\delta\} = [u_i, v_i, w_i, \tau_{xi}, \tau_{yi}, \varphi_i, \tau_{zi}, \kappa_{xi}, \kappa_{yi}, \varepsilon_{zi}, \theta_{zi}, u_j, v_j, w_j, \tau_{xj}, \tau_{yj}, \varphi_j, \tau_{zj}, \kappa_{xj}, \kappa_{yj}, \varepsilon_{zj}, \theta_{zj}]^T$$

(26),(27)式を仮想仕事の原理 $\Pi_a - \Pi_i = 0$ に代入すると $\{\delta^*\}\left[\{P\} - \iiint [B]^T[D][B]\,dx\,dy\,dz\,\{\delta\}\right] = 0$ となる。仮想変位 $\{\delta^*\}$ の任意性より $\{P\} = \iiint [B]^T[D][B]\,dx\,dy\,dz\,\{\delta\} = [K]\{\delta\}$ ---(28) となる。(28)式によって力と変形の関係が求まり,ここで $[K]$ は剛性マトリックスであり,次に示すよう 22×22 のマトリックスである。例えば要素の一部を示すと次式になる。

$$[K] = \begin{bmatrix}
K_{1,1} & K_{1,2} & \cdots & K_{1,12} & \cdots & K_{1,22}\\
 & \ddots & & & & \vdots\\
 & & & K_{12,12} & K_{12,13} & \vdots\\
 & \text{S.Y.M} & & & K_{13,13} & \vdots\\
 & & & & \ddots & K_{22,22}
\end{bmatrix}$$

$K_{1,1} = \frac{120}{7\ell^3}EJ_y + \frac{1440}{\ell^5}E_gH_{yy} + \frac{720}{\ell^5}E_gD_{yy}$,　$K_{1,2} = \frac{120}{7\ell^3}EJ_{xy} + \frac{720}{\ell^5}E_gH_{xy} + \frac{720}{\ell^5}E_gH_{yx} + \frac{720}{\ell^5}E_gD_{xy}$,　$K_{1,3} = 0$,
$K_{1,4} = \frac{60}{7\ell^2}EJ_{xy} + \frac{360}{\ell^4}E_gH_{xy} + \frac{360}{\ell^4}E_gH_{yx} + \frac{360}{\ell^4}E_gD_{xy}$,　$K_{1,5} = \frac{60}{7\ell^2}EJ_y + \frac{720}{\ell^4}E_gH_{yy} + \frac{360}{\ell^4}E_gD_{yy}$,
$K_{1,6} = \frac{120}{7\ell^3}EC_y + \frac{720}{\ell^5}E_gH_{\omega y} + \frac{720}{\ell^5}E_gH_{y\omega} - \frac{120}{7\ell^3}ED_{sy} + \frac{720}{\ell^5}E_gD_{y\omega}$,
$K_{1,7} = \frac{60}{7\ell^2}EC_y + \frac{360}{\ell^4}E_gH_{\omega y} + \frac{360}{\ell^4}E_gH_{y\omega} - \frac{60}{7\ell^2}ED_{sy} + \frac{360}{\ell^4}E_gD_{y\omega}$,
$K_{1,8} = \frac{3}{7\ell}EJ_{xy} + \frac{60}{\ell^3}E_gH_{xy} + \frac{60}{\ell^3}E_gD_{xy}$,　$K_{1,9} = \frac{3}{7\ell}EJ_y + \frac{60}{\ell^3}E_gH_{yy} + \frac{60}{\ell^3}E_gD_{yy}$,
$K_{1,10} = \frac{1}{\ell}EZ_y + \frac{60}{\ell^3}E_gK_{fy}$,　$K_{1,11} = \frac{3}{7\ell}EC_y + \frac{60}{\ell^3}E_gH_{\omega y} - \frac{3}{7\ell}ED_{sy} + \frac{60}{\ell^3}E_gD_{y\omega}$,　$K_{2,2} = \frac{120}{7\ell^3}EJ_x + \frac{1440}{\ell^5}E_gH_{xx} + \frac{720}{\ell^5}E_gD_{xx}$,
$K_{3,3} = \frac{6}{5\ell}EF + \frac{24}{\ell^3}E_gK_{ff} + \frac{12}{\ell^3}E_gD_{ff}$,　$K_{4,4} = \frac{192}{35\ell}EJ_x + \frac{384}{\ell^3}E_gH_{xx} + \frac{192}{\ell^3}E_gD_{xx}$,　$K_{5,5} = \frac{192}{35\ell}EJ_y + \frac{384}{\ell^3}E_gH_{yy} + \frac{192}{\ell^3}E_gD_{yy}$,
$K_{6,6} = \frac{120}{7\ell^3}EJ_\omega + \frac{1440}{\ell^5}E_gH_{\omega\omega} + \frac{10}{7\ell}GJ_z - \frac{240}{7\ell^3}ED_{s\omega} + \frac{720}{\ell^5}E_gD_{\omega\omega}$,　$K_{7,7} = \frac{192}{35\ell}EJ_\omega + \frac{384}{\ell^3}E_gH_{\omega\omega} + \frac{8\ell}{35}GJ_z - \frac{384}{35\ell}ED_{s\omega} + \frac{192}{\ell^3}E_gD_{\omega\omega}$,
$K_{8,8} = \frac{3\ell}{35}EJ_x + \frac{9}{\ell}E_gD_{xx}$,　$K_{9,9} = \frac{3\ell}{35}EJ_y + \frac{9}{\ell}E_gD_{yy}$,　$K_{10,10} = \frac{2\ell}{15}EF + \frac{4}{\ell}E_gD_{ff}$,　$K_{11,11} = \frac{3\ell}{35}EJ_\omega + \frac{\ell^3}{630}GJ_z - \frac{6\ell}{35}ED_{s\omega} + \frac{9}{\ell}E_gD_{\omega\omega}$,

また次のような関係がある。　$K_{12,12} = K_{1,1}$, $K_{12,13} = K_{1,2}$, $K_{12,14} = K_{1,3}$, $K_{12,15} = -K_{1,4}$, $K_{12,16} = -K_{1,5}$, $K_{12,17} = K_{1,6}$, $K_{12,18} = -K_{1,7}$, $K_{12,19} = K_{1,8}$, $K_{12,20} = K_{1,9}$,
$K_{12,21} = K_{1,10}$, $K_{12,22} = K_{1,11}$, $K_{13,13} = K_{2,2}$, $K_{14,14} = K_{3,3}$, $K_{15,15} = K_{4,4}$, $K_{16,16} = K_{5,5}$, $K_{17,17} = K_{6,6}$, $K_{18,18} = K_{7,7}$, $K_{19,19} = K_{8,8}$, $K_{20,20} = K_{9,9}$, $K_{21,21} = K_{10,10}$, $K_{22,22} = K_{11,11}$,

上式において $E_g = E^2/G$ であり,断面諸量は次式で定義されるものを用いた。　$F = \int_F dF$,　$Z_y = \int_F x\,dF$, $J_x = \int_F y^2 dF$, $J_y = \int_F x^2 dF$, $J_{xy} = \int_F x \cdot y\,dF$,
$J_z = \int_F \Theta^2 dF$, $J_\omega = \int_F \omega^2 dF$, $C_y = \int_F \omega \cdot x\,dF$, $D_{sy} = \int_F \frac{\Theta \cdot S_y}{t} dF$, $D_{s\omega} = \int_F \frac{\Theta \cdot S_\omega}{t} dF$, $K_{ff} = \int_F B_f\,dF$, $K_{fy} = \int_F B_y\,dF$, $H_{xx} = \int_F B_x y\,dF$, $H_{xy} = \int_F B_x x\,dF$, $H_{yx} = \int_F B_y \cdot y\,dF$,
$H_{yy} = \int_F B_y x\,dF$, $H_{y\omega} = \int_F B_y \omega\,dF$, $H_{\omega y} = \int_F B_\omega x\,dF$, $H_{\omega\omega} = \int_F B_\omega \omega\,dF$, $D_{ff} = \int_F \frac{S_f^2}{t^2} dF$, $D_{xx} = \int_F \frac{S_x^2}{t^2} dF$, $D_{xy} = \int_F \frac{S_x S_y}{t^2} dF$, $D_{yy} = \int_F \frac{S_y^2}{t^2} dF$, $D_{y\omega} = \int_F \frac{S_y S_\omega}{t^2} dF$, $D_{\omega\omega} = \int_F \frac{S_\omega^2}{t^2} dF$,
他の要素においては次式で定義される断面諸量を用いた。　$Z_x = \int_F y\,dF$, $Z_\omega = \int_F \omega\,dF$, $C_x = \int_F \omega \cdot y\,dF$, $D_{sf} = \int_F \frac{\Theta \cdot S_f}{t} dF$, $D_{sx} = \int_F \frac{\Theta \cdot S_x}{t} dF$, $K_{fx} = \int_F B_x\,dF$,
$K_{f\omega} = \int_F B_\omega\,dF$, $H_{fx} = \int_F B_f \cdot y\,dF$, $H_{fy} = \int_F B_f \cdot x\,dF$, $H_{f\omega} = \int_F B_f \cdot \omega\,dF$, $H_{x\omega} = \int_F B_x \cdot \omega\,dF$, $H_{\omega x} = \int_F B_\omega\, y\,dF$, $D_{fx} = \int_F \frac{S_f S_x}{t^2} dF$, $D_{fy} = \int_F \frac{S_f S_y}{t^2} dF$, $D_{f\omega} = \int_F \frac{S_f S_\omega}{t^2} dF$, $D_{x\omega} = \int_F \frac{S_x S_\omega}{t^2} dF$,
ここで $S_f \sim S_\omega$, $B_f \sim B_\omega$ は(21)式で与えられる。

参考文献　西野ほか:軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材　土木学会論文報告集 No.225