(11) 薄肉断面直線材の　せん断変形解析

秋田大学　土木工学科　　正員　　稼農 知徳
秋田大学　土木工学科　　正員　　薄木 征三
秋田大学　土木工学科　　学生員　○ 福田 隆

1. まえがき　薄肉断面直線材の曲げに伴うせん断応力によるせん断変形解析を行う。曲げに伴うせん断応力による変形の影響はTimoshenko's Beam Theoryにみられるように静力学的、動力学的に研究されている。このTimoshenkoによれば　せん断力Qによるたわみ曲線の勾配 $\frac{dw_s}{dz}$ は近似的に　中立軸におけるせん断ひずみ γ_c に等しいとおき　$\frac{dw_s}{dz}=\gamma_c=\frac{\alpha_s Q}{GA}$ としている。ここに　Q/A　は　せん断力を　はりの断面積で除して得られる平均せん断応力、α_s は　断面の図心におけるせん断応力を得るために　平均せん断応力にかけねばならない係数 $\alpha_s=SA/Ib$ すなわちせん断係数である。このせん断係数は　はりの中立軸におけるせん断応力と平均せん断応力との比（たとえば長方形断面の場合 $\alpha_s=\frac{3}{2}$）に等しい。すなわち中立軸におけるせん断ひずみを基礎にしており、はりの高さにわたってせん断ひずみが変化していることを考慮していない。一方、たわみは純粋曲げの場合に対して導いた曲げ理論を基礎にしているから近似的なものにとどまっている。これについては　G.R. Cowper[1] が　3次元弾性論に基づいたより厳密な方法によって　Timoshenko's Beam Theory のせん断係数を導いている。これによると静的なたわみについてはTimoshenkoの値よりも小さい値を得ている。本論文は薄肉断面直線材の基礎的解析において　断面不変の仮定を保持したうえで、ひずみ変位場を明確にしてせん断ひずみの影響を考慮することを試みたものであるが、この場合ひずみ成分に対してせん断変形の影響を補正する形で附加されるものとした。ひずみ成分が求められると、仮想仕事の原理により基礎式が得られる。ここでは薄肉断面直線材の曲げに伴うせん断応力によるせん断変形のみの影響を求め、Timoshenko、Cowper　の値と比較したものである。基礎式としては変位関数を　5次のべき級数に近似して仮想仕事の原理を用いて剛性マトリックスを求めることにより得られる。

2. 変位とひずみ成分　解析上の仮定は　1)断面不変　2)薄板要素の板厚中心面に垂直で部材軸線に平行な面内でのせん断ひずみは無視する、などである。座標系は原点をOとする右手系座標O-xyz と断面の板厚中心面上の任意の点Cを原点とする直交曲線座標（s, n, z）を用いる。断面上の任意の点P（x, y, z）の変位（$\bar{u}$ $\bar{v}$ $\bar{w}$）とひずみ成分との関係は、　$\varepsilon_x=\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}$, $\varepsilon_y=\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}$, $\varepsilon_z=\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}$,　$\gamma_{xy}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}$,　$\gamma_{yz}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}$,　$\gamma_{zx}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}$ ----(1)
仮定1)より　$\varepsilon_x=0$, $\varepsilon_y=0$, $\gamma_{xy}=0$ ---- (2)　　式(2)より剛体変位が求められる。　$\bar{u}=u-y\varphi$,
$\bar{v}=v+x\varphi$ -----(3)　　u vは点Oの変位であり φ は点Oの回転変位である。変位 $\bar{w}$ を求めるために直交曲線座標（s, n, z）を用いて任意の点Pのせん断ひずみ γ_{sz} および γ_{nz} を求める。$\gamma_{sz}=m\gamma_{yz}+l\gamma_{zx}$,
$\gamma_{nz}=-l\gamma_{yz}+m\gamma_{zx}$（$l$, m は方向余弦）　であるから、式(1)(3)より　$\gamma_{sz}=\frac{\partial\bar{w}}{\partial s}+v'\frac{\partial y}{\partial s}+u'\frac{\partial x}{\partial s}+r_s\varphi'$,
$\gamma_{nz}=\frac{\partial\bar{w}}{\partial n}+v'\frac{\partial y}{\partial n}+u'\frac{\partial x}{\partial n}+r_n\varphi'$ -------(4)a-b　　ここで　$r_s=mx-ly$　$r_n=-lx-my$　　仮定2)により $\gamma_{nz}=0$ とすることができるので　式(4)b をnについて積分して、$\bar{w}=C_1(z)-v'y-u'x-r_n\cdot n\cdot\varphi'$ ----(5)
$C_1(z)$は積分定数。　任意の点Pにおける微小要素を考え、z軸方向の力の釣合い条件は、板厚をtとすれば、
$\frac{\partial(\tau_{sz}t)}{\partial s}+\frac{\partial(\sigma_z t)}{\partial z}=0$ ------(6)　　式(6)を変形して積分すると　$\gamma_{sz}=\frac{q_1}{Gt}-\frac{1}{Gt}\int_{s_1}^{s}\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z t)\,ds$ ---(7) q_1は積分定数で　$s=s_1$での$(\tau_s t)$の値である。式(7)において　σ_zはまだ定まっていないので$\sigma_z=0$と仮定する。すなわち$\bar{w}$が定まってσ_zが与えられると再び　式(7)に戻って修正することにするわけである。従って式(7)は
$\gamma_{sz}^*=\frac{q_1}{Gt}$ ---- (8)　　式(4)aと(8)から　$\frac{\partial\bar{w}^*}{\partial s}=\frac{q_1}{Gt}-v'\frac{\partial y^*}{\partial s}-u'\frac{\partial x^*}{\partial s}-r_s^*\varphi'$ -----(9)　変位の連続の条件
$\oint\frac{\partial w^*}{\partial s}ds=0$　から　$q_1=G\varphi'\oint r_s^*ds/\oint\frac{ds}{t}$ -----(10)　式(5)において　$n=0$での値を求めると
$\bar{w}^*=C_1(z)-v'y^*-u'x^*$ -------(11)　これを式(9)に代入すると　$C_1(z)=\int_0^s\frac{q_1}{Gt}ds-\int_0^s r_s^*ds\,\varphi'ds+C_2(z)$

$C_2(z)$は積分定数である。結局式(5)は $\bar{w} = -v'y - u'x - (\Omega + r_n \cdot n)\varphi' + C_2(z)$ ------ (12)a-b

$\Omega = \int_0^s (r_s^* - \oint r_s^* ds / t \oint \frac{ds}{t}) ds$、そして 仮想薄板($t=0$)理論よりD点での変位を$w$とすると、

$C_2(z) = w + \int_0^{s_D} r_s^* ds\, \varphi'$ ------ (13)　従って式(12)は $\bar{w} = w - v'y - u'x - \omega\varphi'$ ------ (14)

$\omega = \Omega + r_n \cdot n - \int_0^{s_D} r_s^* ds$　そり体積が零になるように選ぶと、$\int_F \omega\, dF = 0$ であるから $\int_0^{s_D} r_s^* ds = \frac{1}{F}\int_F (\Omega + r_n n) dF$

故に $\omega = \Omega + r_n n - \frac{1}{F}\int_F (\Omega + r_n n) dF$ ------ (15) となる。$\bar{w}$が決定したので ひずみ成分は次のようになる。

$\varepsilon_z = w' - y v'' - x u'' - \omega \varphi''$, $\gamma_{sz} = \Theta \varphi'$, $\Theta = \oint r_s^* ds / t \oint \frac{ds}{t} - 2n$ -------- (16)a-c

式(16)により $\sigma_z (= E\varepsilon_z)$ が求められたので 式(7)に戻って修正すると $\gamma_{sz} = \frac{q_1}{Gt} - \frac{E}{Gt}\int_{s_1}^{s} (w'' - y v''' - x u''' - \omega \varphi''') t\, ds$ ----- (17)　以下全く同じ過程によって次のように ひずみ成分が求められる。その他のひずみ成分は零である。

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_z &= w' - y v'' - x u'' - \omega \varphi'' - \frac{E}{G}(B_f w''' - B_x v^{IV} - B_y u^{IV} - B_\omega \varphi^{IV}) \\ \gamma_{sz} &= \Theta \varphi' - \frac{E}{Gt}(S_f w'' - S_x v''' - S_y u''' - S_\omega \varphi''') \end{aligned}\right\} (18)$$

式中 B および S は たとえば $S_y = S_{y0} - S_{y1}$, $S_{y0} = \int_{s_1}^{s} x t\, ds$, $S_{y1} = \oint \frac{S_{y0}}{t} ds / \oint \frac{ds}{t}$, $B_y = \int_{s_1}^{s} \frac{S_y}{t} ds$ である

3、<u>薄肉直線曲げ部材の剛性マトリックス</u>　任意原点Dを図心Oにとって変位uを5次のべき級数で近似する。

$u(z) = H(z) \cdot \{a\}$, $\{a\} = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^T$, $H(z) = [1, z, z^2, z^3, z^4, z^5]$ -------- (19)

有限要素法の周知の手法を 式(18)の$u(z)$に関する項のみに用いれば、次のように剛性マトリックスが求められる。$\{P\} = [K]\{u\}$　$\{P\} = [Q_{xi}, M_{yi}, Q_{xj}, M_{yj}, H_{yi}, H_{yj}]^T$　$\{u\} = [u_{xi}, \beta_{yi}, u_{xj}, \beta_{yj}, \chi_{yi}, \chi_{yj}]^T$ ---- (20)a-c

$[K]$は 6×6 の対称マトリックスであり各要素は、$K_{11} = \frac{120}{7\ell^3} EJ_y + \frac{1440}{\ell^5} E_g H_{yy} + \frac{720}{\ell^5} E_g D_{yy}$, $K_{13} = -K_{11}$

$K_{12} = \frac{60}{7\ell^2} EJ_y + \frac{720}{\ell^4} E_g H_{yy} + \frac{360}{\ell^4} E_g D_{yy}$, $K_{14} = K_{12}$, $K_{15} = \frac{3}{7\ell} EJ_y + \frac{60}{\ell^3} E_g H_{yy} + \frac{60}{\ell^3} E_g D_{yy}$, $K_{16} = -K_{15}$

$K_{22} = \frac{192}{35\ell} EJ_y + \frac{384}{\ell^3} E_g H_{yy} + \frac{192}{\ell^3} E_g D_{yy}$, $K_{23} = -K_{12}$, $K_{24} = \frac{108}{35\ell} EJ_y + \frac{336}{\ell^3} E_g H_{yy} + \frac{168}{\ell^3} E_g D_{yy}$, $K_{33} = K_{11}$

$K_{25} = \frac{11}{35} EJ_y + \frac{36}{\ell^2} E_g H_{yy} + \frac{36}{\ell^2} E_g D_{yy}$, $K_{26} = -\frac{4}{35} EJ_y - \frac{24}{\ell^2} E_g H_{yy} - \frac{24}{\ell^2} E_g D_{yy}$, $K_{34} = -K_{12}$,

$K_{35} = -K_{15}$, $K_{36} = K_{16}$　$K_{44} = \frac{192}{35\ell} EJ_y + \frac{384}{\ell^3} E_g H_{yy} + \frac{192}{\ell^3} E_g D_{yy}$, $K_{45} = -K_{26}$, $K_{46} = -K_{25}$

$K_{55} = \frac{3\ell}{35} EJ_y + \frac{9}{\ell} E_g D_{yy}$　$K_{56} = \frac{\ell}{70} EJ_y - \frac{3}{\ell} E_g D_{yy}$, $K_{66} = K_{55}$

ここで $J_y = \int_F x^2 dF$, $D_{yy} = \int_F \frac{S_y^2}{t} dF$, $H_{yy} = \int_F B_y x\, dF$, $E_g = E^2/G$

式(20)a を分割マトリックスで表示すると、

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{Bmatrix} \text{ ---- (22)}$$

ここで $\{P_\alpha\} = [Q_{xi}, M_{yi}, Q_{xj}, M_{yj}]^T$, $\{P_\beta\} = [H_{yi}, H_{yj}]^T = 0$

$\{u_\alpha\} = [u_{xi}, \beta_{yi}, u_{xj}, \beta_{yj}]^T$　$\{u_\beta\} = [\chi_{yi}, \chi_{yj}]^T$

式(22)より $\{u_\beta\} = K_{\beta\beta}^{-1} K_{\beta\alpha}\{u_\alpha\}$, $\{P_\alpha\} = K_{\alpha\alpha}\{u_\alpha\} + K_{\alpha\beta}\{u_\beta\} = [K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha\beta} K_{\beta\beta}^{-1} K_{\beta\alpha}]\{u_\alpha\}$ ---- (23)

4、<u>計算例</u>　1端固定他端自由の矩形はりを対象として解析する。断面値は次の通りである。

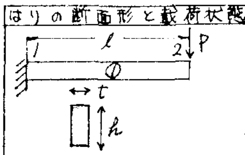
$J_y = \frac{th^3}{12}$, $D_{yy} = \frac{th^5}{120}$, $H_{yy} = -\frac{th^5}{120}$, $E/G = 2.6$, $h/\ell = \frac{1}{10}$　本論文の場合は1要素近似で計算する。

式(23)を用いて自由端の変位を求めると、$u_{x1} = \beta_{y1} = 0$として

$$\begin{Bmatrix} u_{x2} \\ \beta_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{10^3}{h^2 tE} \begin{bmatrix} 4.03912h^2 & 0.60255h \\ 0.60255h & 0.12051 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{x2} \\ M_{y2} \end{Bmatrix} \text{ ---- (a)}$$

式(20)a を用いてさらに$\chi_{y2}=0$なる拘束条件を追加すると、

$$\begin{Bmatrix} u_{x2} \\ \beta_{y2} \\ \chi_{y1} \end{Bmatrix} = \frac{10^3}{h^2 tE} \begin{bmatrix} 4.0325h^2 & 0.5955h & 0.0960 \\ & 0.1126 & 0.0116\frac{1}{h} \\ \text{Symm.} & & 0.0136\frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{x2} \\ M_{y2} \\ H_{y1} \end{Bmatrix} \text{ -- (b)}$$

はりの断面形と載荷状態		Cowper	Timoshenko	本	法
	せん断係数	1.18	3/2	式 (a)	式 (b)
	たわみ	$y = \frac{P\ell^3}{3EJ_y}(1 + \frac{3\alpha EJ_y}{AG\ell^2}) = \frac{P}{tE} \times 4.0307 \times 10^3$	$y = \frac{P\ell^3}{3EJ_y}(1 + \frac{3\alpha EJ_y}{AG\ell^2}) = \frac{P}{tE} \times 4.0390 \times 10^3$	$\frac{P}{tE} \times 4.0391 \times 10^3$	$\frac{P}{tE} \times 4.0325 \times 10^3$
	Cowperに対する誤差	—	0.21 %	0.21 %	0.04 %

この結果から1端固定他端自由の矩形はりの自由端に集中荷重が作用した場合には3者ともよく一致している。

文献[1] G.R. Cowper「The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory」, Jour. Applied Mechanics 1966 June.