

秋田大学 正員 ○薄木征三

秋田大学 学員 山岸一孝

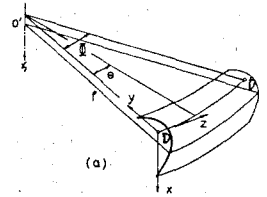
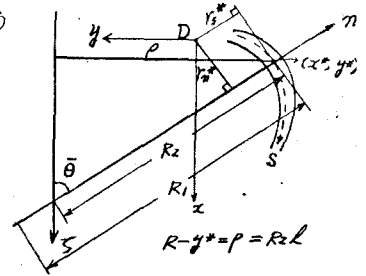
秋田大学 正員 篠原知徳

1. まえがき アーチの曲率面内に荷重が作用した時の、曲率面外への座屈、すなわち横倒れ座屈は、アーチ橋の耐荷能力を決定する要素の1つとして重要であり、古くから多くの研究者によって扱われてきた問題である。問題を弾性座屈に限定するとき、座屈変位を支配する方程式を導く方法には種々の方法があるが、従来はこれらの方法において座屈前の変位は小さいとして無視されている。ここでは、薄肉シエルのひずみ-変位関係式に弾性座屈としての従来の仮定を適用して得られる変位場を基礎として、増分理論を基に座屈前の変位を考慮した座屈支配方程式と純曲げの場合の解を示す。

2. ひずみ-変位関係 図-1で、軸方向のひずみ ϵ_0 と薄肉中央面に沿うせん断ひずみ γ は、 $l = \sin \theta$, $m = \cos \theta$ として

$$\epsilon_0 = \frac{1}{1+n/R_2} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\xi}{s} m + \frac{\eta}{s} l \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+n/R_2)^2} \left\{ \left(\frac{1}{s} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w}{s} m \right)^2 + \left(\frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w}{s} l \right)^2 \right\} \quad \text{----- (1)}$$

$$\gamma_s = \frac{1}{1+n/R_1} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{1+n/R_2} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w}{s} m \right) + \frac{1}{(1+n/R_1)(1+n/R_2)} \times \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\eta}{R_1} \right) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{w}{s} m \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\xi}{R_1} \right) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{w}{s} l \right) \right\} \quad \text{---- (2)}$$



ただし、軸方向変位 w の微係数の2次の項は無視する。一方、(1)、(2)を含めた、薄肉シエルのひずみ-変位関係に、弾性理論の仮定、すなわち断面形不変の仮定と、せん断ひずみに関するオイラーヌーイの仮定に基づいて得られる変位場は、 x , y 方向の変位を u , v として

$$u = u_0 - y \sin \varphi - x(1 - \cos \varphi), \quad v = v_0 + x \sin \varphi - y(1 - \cos \varphi), \\ w = w_0 - y \{ (v'_0 + w_0/R) \cos \varphi - u'_0 \sin \varphi \} - x \{ u'_0 \cos \varphi + (v'_0 + w_0/R) \sin \varphi \} \\ - w(s, n) \{ \varphi' - u'_0 \cos \varphi / R - (v'_0 + w_0/R) \sin \varphi / R \} \quad \text{----- (3. a-c)}$$

である。ここに、 $'$ は $R\theta$ に関する微分である。 ξ , η と u , v の関係は、 $\xi = mv + ln$, $\eta = mu - lv$ である。特に(3.c)の w は、(2)を含めたせん断ひずみに関するひずみ-変位関係式の2次項において、 $w = u_0$ と近似することによって得られたものである。 $w(s, n)$ は φ 関数であり、基本的には微小変位の場合と同じものである。(3)で $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ をTaylor展開して変位の3次式まで展開すると

$$u = u_0 - y(\varphi - \varphi^3/6) - x\varphi^2/2, \quad v = v_0 + x(\varphi - \varphi^3/6) - y\varphi^2/2 \\ w = w_0 - y \{ (1 - \varphi^2/2) \phi_x - \varphi \phi_y \} - x \{ (1 - \varphi^2/2) \phi_y + \varphi \phi_x \} - w(\psi_2 + \varphi^2 \phi_y / 2R - \varphi \phi_x / R) \quad \text{---- (4 a-c)}$$

$$\text{ここで } \phi_x = v'_0 + w_0/R, \quad \phi_y = u'_0, \quad \psi_2 = \varphi' - u'_0/R \quad \text{----- (5)}$$

ϕ_x , ϕ_y は任意定数 D を連ねた軸線の各々 $y-z$ 面, $x-z$ 面に関する線形理論での接線回転角を、 ψ_2 は同理論でのこの軸線まわりのねじり率を表わしている。

これを(1)、(2)に代入して同様に変位の3次まで表わすと

$$\varepsilon_\theta = \frac{R}{S} \varepsilon_z - \frac{R}{S} y \varepsilon_x - \frac{R}{S} x \varepsilon_y - \frac{R}{S} \omega \varepsilon_\omega + \varepsilon_n + \left(\frac{R}{S}\right)^2 y^2 \varepsilon_{xx} + \left(\frac{R}{S}\right)^2 x^2 \varepsilon_{yy} + \left(\frac{R}{S}\right)^2 \frac{\omega y}{R} \varepsilon_{\omega y} + \left(\frac{R}{S}\right)^2 x y \varepsilon_{xy}, \quad (5)$$

$$\delta_s = \Theta (\psi_z - \varphi \phi_x / R + \varphi^2 \phi_y / 2R) \quad \text{-----} \quad (6)$$

ここで $\varepsilon_n = (\phi_x^2 + \phi_y^2) / 2$

$$\varepsilon_x = \kappa_x - (\varphi \phi_y)' - \varphi^2 / 2R - (\varphi^2 \phi_x)'' / 2 + \psi_z \phi_y + \varphi \psi_z \phi_x$$

$$\varepsilon_y = \kappa_y + (\varphi \phi_x)' - \varphi^2 / 2R - (\varphi^2 \phi_y)'' / 2 - \psi_z \phi_x + \varphi (\phi_x^2 / R + \phi_y^2 / R + \psi_z \phi_y)$$

$$\varepsilon_\omega = \varphi_\omega - (\varphi \phi_x)' + (\varphi^2 \phi_y)'' / 2R + \phi_x (\psi_z - \varphi \phi_x / R) / R$$

$$\varepsilon_{xx} = \psi_z^2 / 2, \quad \varepsilon_{yy} = \psi_z^2 / 2 - \varphi \psi_z \phi_x / R, \quad \varepsilon_{\omega y} = \varphi \psi_z^2, \quad \varepsilon_{xy} = \varphi \psi_z \phi_y / R$$

$$\varepsilon_z = \omega_p' - \psi_p / R, \quad \kappa_x = \psi_p'' + \omega_p' / R, \quad \kappa_y = \omega_p'' + \varphi / R, \quad \varphi_\omega = \varphi'' - \omega_p'' / R \quad \text{-----} \quad (7a-c)$$

κ_x, κ_y は各々, x, y 軸まわりの曲率の変化を, φ_ω は z 軸回りの曲率のいり率を線形理論で意味する。

3. 1 軸対称アーチの横座屈方程式

座屈前の状態での荷重, 応力および変位の全てに指標 0 を付し, 座屈変位する事によるこれらの増分量には * を付さないものとする, 座屈変位した後の仮想仕事の原理は

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \int_F \{ (\sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^*) \delta (\varepsilon_\theta^0 + \varepsilon_\theta^*) + (\tau_s^0 + \tau_s^*) \delta (\delta_s^0 + \delta_s^*) \} dF \rho d\theta - \int_0^{\pi} \{ (\delta_x^0 + \delta_x^*) \delta (u^0 + u^*) \\ & + (\delta_y^0 + \delta_y^*) \delta (v^0 + v^*) + (\delta_z^0 + \delta_z^*) \delta (w^0 + w^*) \} dF \rho d\theta - \left[\int_F \{ (\tau_{xz}^0 + \tau_{xz}^*) \delta (u^0 + u^*) \right. \\ & \left. + (\tau_{yz}^0 + \tau_{yz}^*) \delta (v^0 + v^*) + (\sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^*) \delta (w^0 + w^*) \} dF \right]_0^{\pi} = 0 \quad \text{-----} \quad (8) \end{aligned}$$

ここで, $\delta_x^0, \delta_y^0, \delta_z^0$ は座屈前に x, y, z 方向に作用している物体力である。但し, $\delta_x^0 = 0$ とする。作用する外力は保形系とすると, 座屈前後で荷重の増分は無いから, $\delta_x^* = \delta_y^* = \delta_z^* = \tau_{xz}^* = \tau_{yz}^* = \sigma_\theta^* = 0$ である。(8) に (4), (6), (7) を代入すると, この時, 1 軸対称断面であるから, 座屈前で $u_p^0 = \phi_y^0 = \kappa_y^0 = \varphi^0 = \psi_z^0 = \varphi_\omega^0 = 0$ であることに注意して, (8) は

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \int_F (\sigma_\theta^0 \delta \varepsilon_\theta^* + \tau_s^0 \delta \delta_s^* + \sigma_\theta^0 \delta \varepsilon_\theta^N + \tau_s^0 \delta \delta_s^N) dF \rho d\theta - \int_0^{\pi} \int_F (\delta_y^0 \delta v^N + \delta_z^0 \delta w^N) dF \rho d\theta \\ & - \left[\int_F (\tau_{xz}^0 \delta u^N + \tau_{yz}^0 \delta v^N + \sigma_\theta^0 \delta w^N) dF \right]_0^{\pi} = - \int_0^{\pi} \int_F (\sigma_\theta^0 \delta \varepsilon_\theta^* + \tau_s^0 \delta \delta_s^*) dF \rho d\theta \\ & + \int_0^{\pi} \int_F (\delta_y^0 \delta v^* + \delta_z^0 \delta w^*) dF \rho d\theta + \left[\int_F (\tau_{xz}^0 \delta u^* + \tau_{yz}^0 \delta v^* + \sigma_\theta^0 \delta w^*) dF \right]_0^{\pi} \quad \text{-----} \quad (9) \end{aligned}$$

ここに

$$u^* = u_p - y \varphi, \quad v^* = v_p + x \varphi, \quad w^* = \omega_p - y \phi_x - x (\phi_y + \phi_x^2 \varphi) - \omega (\psi_z - \phi_x^2 \varphi / R) \quad \text{-----} \quad (10. a-c)$$

$$u^N = -x \varphi^2 / 2, \quad v^N = -y \varphi^2 / 2, \quad w^N = y (\varphi \phi_y + \phi_x^2 \varphi^2 / 2) - x \varphi \phi_x + \omega \varphi \phi_x / R \quad \text{-----} \quad (11. a-c)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \kappa_x, & \varepsilon_y^* &= \kappa_y + (\phi_x^2 \varphi)' - \phi_x^2 \psi_z + \phi_x^2 \varphi / R, & \varepsilon_n^* &= \phi_x^2 \phi_x \\ \varepsilon_\omega^* &= \varphi_\omega - (\phi_x^2 \varphi)' / R + \phi_x^2 \psi_z / R - \phi_x^2 \varphi / R^2, & \delta_s^* &= \Theta (\psi_z - \phi_x^2 \varphi / R) \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} \quad (12. a-c)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^N &= -(\kappa_y \varphi + \phi_y^2 / R - \varphi^2 / 2R + \kappa_x^2 \varphi^2 / 2 + \phi_x^2 \phi_y \varphi / R) \\ \varepsilon_\omega^N &= -(\kappa_x \varphi + \phi_x \varphi / R + 2 \phi_x^2 \phi_x \varphi / R) / R, & \delta_s^N &= -\Theta (\psi_z - \phi_x^2 \varphi / R) \\ \varepsilon_y^N &= (\kappa_x \varphi + \phi_x \phi_y / R + 2 \phi_x^2 \phi_x \varphi / R) \\ \varepsilon_n^N &= (\phi_x^2 + \phi_y^2) / 2, & \varepsilon_{xx}^N &= \psi_z^2 / 2, & \varepsilon_{yy}^N &= -\phi_x^2 \varphi \psi_z / R + \psi_z^2 / 2 \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} \quad (13. a-g)$$

$^*, ^N$ は各々, 変位増分に関して 1 次, 2 次の項からなることを示している。

ところで, 変位場の式(9)は, 軸方向変位の微係数が 1 に比べて十分に小さい事, 従って, 小さな曲げ変形に対して適用しうるものであるから, (10) ~ (13) の接線回転角 ϕ_x^0 は, 1 に比べて十分に小さくなっている。それ故

に、次のように近似し得る。

$$\begin{aligned} w'' &\approx y\varphi\phi_y - x\varphi\phi_x + w\varphi\phi_x/R, & E_y^* &\approx K_y + K_x^0\varphi \\ E_\omega^* &\approx \varnothing_\omega - K_x^0\varphi/R, & E_x^* &\approx -(K_y\varphi + \phi_y^2/R - \varphi^2/2R + K_x^0\varphi^2/2) \\ E_\omega'' &\approx -(K_x\varphi + \phi_x\varphi/R)/R, & E_y'' &\approx K_x\varphi + \phi_x\phi_y/R \\ E_{y\theta}'' &\approx \varphi_x^2/2 \end{aligned} \quad \text{--- (14. a~g)}$$

式(9)に(10)~(14)を代入して部分積分すると

座屈後の横倒れ座屈に対して

$$\{EJ_y(K_y + K_x^0\varphi) - EC_\omega(\varnothing_\omega - K_x^0\varphi/R)/R + M_x^0\varphi\}'' + GJ_T(\varnothing_\omega - K_x^0\varphi/R) - M_x^0(\phi_y + \phi_x^0\varphi)/R = 0 \quad \text{--- (15)}$$

$$\begin{aligned} \{EC_\omega(\varnothing_\omega - K_x^0\varphi/R)\}'' - GJ_T(\varnothing_\omega - K_x^0\varphi/R) - EC_\omega(\varnothing_\omega - K_x^0\varphi/R)K_x^0/R \\ + \{EJ_y(1/R + K_x^0) + M_x^0\}(K_y + K_x^0\varphi) = 0 \end{aligned} \quad \text{--- (16)}$$

境界条件

$$\begin{aligned} \delta u_0 = 0, \text{ または, } \{EC_\omega(\varnothing_\omega - K_x^0\varphi/R)/R - EJ_y(K_y + K_x^0\varphi) - M_x^0\varphi\}' - GJ_T(\varphi_x - \phi_x^0\varphi/R) + m_x^0\varphi = 0 \\ \delta \varphi = 0, \text{ または, } -\{EC_\omega(\varnothing_\omega - K_x^0\varphi/R)\}' + GJ_T(\varphi_x - \phi_x^0\varphi/R) - M_x^0(\phi_y + \phi_x^0\varphi) = 0 \\ \delta \phi_y = 0, \text{ または, } EJ_y(K_y + K_x^0\varphi) = 0 \\ \delta \varphi_x = 0, \text{ または, } EC_\omega(\varnothing_\omega - K_x^0\varphi/R) = 0 \end{aligned} \quad \text{--- (17. a~d)}$$

座屈前の変位に対して

$$(EJ_x K_x^0)'' - EF(\varepsilon_x^0 + \phi_x^0/2) - m_x^0 - p_y^0 = 0 \quad \text{--- (18)}$$

$$\{-EF(\varepsilon_x^0 + \phi_x^0/2)\}' - (EJ_x K_x^0)' / R + m_x^0 / R - p_x^0 = 0 \quad \text{--- (19)}$$

境界条件

$$\begin{aligned} \delta u_0 = 0, \text{ または, } -(EJ_x K_x^0)' + m_x^0 - Q_y^0 = 0 \\ \delta u_0 = 0, \text{ または, } EF(\varepsilon_x^0 + \phi_x^0/2) - N^0 = 0 \\ \delta \phi_x = 0, \text{ または, } EJ_x K_x^0 + M_x^0 = 0 \end{aligned} \quad \text{--- (20. a~c)}$$

但し、(15)~(17)はせん断中心軸での変位、(18)~(20)は中立軸での変位で表わしており、断面定数 $J_y, C_\omega, J_x, J_T, F$ は慣用の表示であり、 Q_y^0, N^0, M_x^0 は、座屈前の状態で作用しているせん断力、軸力、曲げモーメントである。又、 m_x^0 は x 軸まわりに作用する分布ねじりモーメント、 p_y, p_x は各々、y, x 方向に作用する部材長の単位長さあたりの分布荷重である。

4. 計算例 図のように両端に曲げを受けるアーチがあり、曲率面外にも面内にも単点支持とする。この時の(18)、(19)の解は、

$$EJ_x K_x^0 = -M_x^0 \quad \text{--- (21)}$$

となる。(21)を(15)、(16)に代入し、座屈変位として

$$u_0 = a_0 \sin \pi\theta/\pi, \quad \varphi = b_0 \sin \pi\theta/\pi \quad \text{--- (22)}$$

を仮定すると、境界条件 $\delta u_0 = \delta \varphi = 0$ 、($\theta = 0, \pi$) を満たす。

式(22)を(15)、(16)に代入し、 a_0, b_0 の係数行列を 0 とおくと、

$$\alpha(\alpha-1)\bar{M}^2 + \{\alpha(1+k+\lambda^2 m^2) - k\}\bar{M} + (1-m^2)(\lambda^2 m^2 + k) = 0 \quad \text{--- (23)}$$

を得る。但し、 $m = \pi/\pi$, $\alpha = J_x/J_y$, $k = GJ_T/EJ_y$, $\lambda^2 = EC_\omega/EJ_y R^2$, $\bar{M} = RM_x^0/EJ_x$ である。

式(23)を $\bar{M}$ について解くと、 $\alpha \neq 1$ として

$$\bar{M} = \frac{1}{2\alpha(\alpha-1)} \left[k - \alpha(1+k+\lambda^2 m^2) \pm \sqrt{\{\alpha(1+k+\lambda^2 m^2) - k\}^2 - 4(1-m^2)\alpha(\alpha-1)(k+\lambda^2 m^2)} \right]$$

を得る。 $R\pi = L$ として、 $R \rightarrow \infty$, $\pi \rightarrow 0$ の極限では直線材の場合に一致する。

