

(9) 薄肉曲線材の動的不安定向題

秋田大学 正員 〇薄木 征三
秋田大学 正員 榎 農 知徳

1. はじめに 部材の構造不安定向題(座屈)を、一般に、作用する荷重の時間的および空間的变化と構造物の慣性力を考慮して、構造物の振幅および速度の発散の有無を調べることにあつて、安定、不安定を論じようとするのが動的不安定向題であり、その性質上主として機械や航空工学の分野で発展してきた。特に作用する荷重が非保存力である場合や、保存力であっても構造減衰を考慮すると、動的判定法による座屈荷重は、静的判定法によるものとは異なることが指摘されている。土木工学においても、静水圧や地震動などの荷重、あるいは構造減衰を考慮すると、同様の問題が生ずることが想定される。ここでは、薄肉断面曲線材の動的不安定向題を扱うための、基本微分方程式を、線形化有限変位理論の立場から与えることを目的とする。

2. ひずみ-変位関係式 薄肉曲線材を薄肉回轉レールと見なすとき、有限変位の薄肉回轉レールのひずみ-変位関係式に、棒理論の仮定、すなわち断面形状不変の仮定と、せん断ひずみに関するオイラー-バールミーの仮定を適用して得られる変位場は¹⁾以下の様である。

$$u = u_0 - y \sin \varphi - x(1 - \cos \varphi), \quad v = v_0 + x \sin \varphi - y(1 - \cos \varphi) \\ w = w_0 - y \{ (v_0' + w_0'/R) \cos \varphi - u_0' \sin \varphi \} - x \{ u_0' \cos \varphi + (v_0' + w_0'/R) \sin \varphi \} - \omega \{ \varphi' - u_0' \cos \varphi / R - (v_0' + w_0'/R) \sin \varphi / R \} \dots (1.a.d)$$

ここに、 u, v, w は x, y, z 方向の変位、 u_0, v_0, w_0 は任意点 D の x 軸の値、 φ は z 軸まわりのねじり角、 ω はねじり角、 $'$ は R に関する微分である。

(1) の変位の2次式で近似すると以下の様

$$u = u_0 - y\varphi - x\varphi^2/2, \quad v = v_0 + x\varphi - y\varphi^2/2, \quad w = w_0 - y(\varphi_x - \varphi\varphi_y) - x(\varphi_y + \varphi\varphi_x) - \omega(\varphi_z - \varphi\varphi_z/R) \dots (2.a.c)$$

ここに、 $\varphi_x = v_0' + w_0'/R$, $\varphi_y = u_0'$, $\varphi_z = \varphi' - u_0'/R$... (3.a.c) である。変位場(1)を前提とすると、直ひずみ ϵ_0 と薄肉中へ線に沿うせん断ひずみ γ_s も変位の2次式で近似すると(本講演参考文献「けり角の高1/4の横座屈」参照)次のようである。

$$\epsilon_0 = (R/\rho) [\epsilon_z - y \{ k_x - (\varphi\varphi_y) - \varphi^2/2R \} - x \{ k_y + (\varphi\varphi_x) \} - \omega \{ \varphi_z - (\varphi\varphi_z)/R \} + (1/2)(R/\rho)^2 [(\rho\varphi_y/R - y\varphi_z)^2 + \{ \rho\varphi_x/R + (x - \omega/R)\varphi_z \}^2]] \dots (4)$$

$$\gamma_s = \Theta(\varphi_z - \varphi\varphi_x/R) \dots (5)$$

よって、 $\epsilon_z = w_0' - v_0'/R$, $k_x = v_0'' + w_0''/R$, $k_y = u_0'' + \varphi/R$, $\varphi_z = \varphi'' - u_0''/R$... (6.a.d) となる。 $\Theta = (R/\rho)^2 \cdot 2\mu$ (μ は z 軸に垂直な断面に対して) である。

3. 座屈支配方程式 座屈前の状態では静的釣合状態にあつたとし、これに微小な動的撓乱を与えることにし、曲線材に慣性力が生ずる。座屈前のすべての変位、荷重、応力に指標 0 を付し、動的撓乱による生じるこれらの増分量には指標 1 を付けるものとする。すると撓乱後の状態の仮想仕事の原理は

$$\int_0^L \left\{ (v_0'' + v_1'') \delta(\epsilon_0 + \epsilon_1) + (v_0'' + v_1'') \delta(\gamma_s + \gamma_1) \right\} dF p d\theta - \int_0^L \left\{ \left[\gamma_x^2 + \gamma_y^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_0 + u_1) \right] \delta(u_0 + u_1) \right\} dF$$

$$+ \left\{ g_1^2 + g_2^2 - \frac{1}{q} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v^0 + v) \right\} \delta(v^0 + v) + \left\{ g_2^2 + g_2^2 - \frac{1}{q} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w^0 + w) \right\} \delta(w^0 + w) \Big] dF p d\theta \\ - \left[\int_F \left\{ (T_{xx}^0 + T_{xx}) \delta(u^0 + u) + (T_{yz}^0 + T_{yz}) \delta(v^0 + v) + (T_{\theta\theta}^0 + T_{\theta\theta}) \delta(w^0 + w) \right\} dF \right]_0^{\infty} = 0 \quad (7)$$

(7)に(2), (4), (5)を代入し(部分積分する)の時, 変位増分に関する方程式において, 変位前の変位を無視し, かつ1軸対称(円軸)であるから $g_1^2 = 0$ とすると, 以下の微分方程式と境界条件を得る。

(1) 円内変位方程式(中立軸の変位について)

$$\frac{1}{q} \left[K_f \ddot{v}_0 + \left\{ K_x \ddot{w}_0 - K_{xx} (\ddot{v}_0' + \frac{\ddot{w}_0}{R}) \right\}' \right] + \left[E J_x (v_0'' + \frac{w_0'}{R}) \right]' - \frac{E F}{R} (w_0' - \frac{v_0}{R}) - \left[(N^0 - \frac{M_x^0}{R}) (v_0' + \frac{w_0}{R}) \right]' - p_y - m_x' = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{q} \left[(K_f - \frac{K_x}{R}) \ddot{w}_0 - (K_x - \frac{K_{xx}}{R}) (\ddot{v}_0' + \frac{\ddot{w}_0}{R}) \right] - \left[E F (w_0' - \frac{v_0}{R}) + \frac{E J_x}{R} (v_0' + \frac{w_0}{R}) \right]' + \frac{1}{R} (N^0 - \frac{M_x^0}{R}) (v_0' + \frac{w_0}{R}) - p_z + \frac{m_x'}{R} = 0 \quad (9)$$

境界条件 $\theta = 0$ と ∞ において

$$\delta v_0 = 0 \quad \text{または} \quad -\frac{1}{q} \left[K_x \ddot{w}_0 - K_{xx} (\ddot{v}_0' + \frac{\ddot{w}_0}{R}) \right] - \left[E J_x (v_0'' + \frac{w_0'}{R}) \right]' + (N^0 - \frac{M_x^0}{R}) (v_0' + \frac{w_0}{R}) - Q_y + m_x = 0 \quad (10)$$

$$\delta w_0 = 0 \quad \text{または} \quad E F (w_0' - \frac{v_0}{R}) - N = 0 \quad (11)$$

$$\delta \phi_x = 0 \quad \text{または} \quad E J_x (v_0'' + \frac{w_0'}{R}) + M_x = 0 \quad (12)$$

以上で $\cdot$ は時間 t に関する微分。以下同様。

(2) 横倒れ変位方程式(偏心中立軸の変位について)

$$\frac{1}{q} \left[K_f \ddot{u}_0 - K_x \ddot{\phi} - \left\{ (K_{yy} - \frac{K_{\omega\omega}}{R}) \ddot{u}_0 + (K_{\omega y} - \frac{K_{\omega\omega}}{R}) (\ddot{\phi}' - \frac{\ddot{u}_0'}{R}) \right\}' \right] + \left[E J_y (u_0'' + \frac{\phi}{R}) - \frac{E C_{\omega}}{R} (\phi'' - \frac{u_0'}{R}) \right]' \\ + (M_x^0 - y_s N^0) \phi'' + \frac{G J_T}{R} (\phi'' - \frac{u_0'}{R}) + \frac{1}{R} \left[\left(\frac{J_{Tz}}{F} N^0 + \frac{J_{Tz}}{J_x} M_x^0 \right) (\phi' - \frac{u_0'}{R}) - \left\{ N^0 (1 - \frac{y_s}{R}) + \frac{M_x^0}{R} \right\} u_0' \right] - p_x - m_y' + \frac{m_{\omega}'}{R} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{q} \left[-K_x \ddot{u}_0 + K_{xy} \ddot{\phi} - \left\{ K_{\omega y} \ddot{u}_0 + K_{\omega\omega} (\ddot{\phi}' - \frac{\ddot{u}_0'}{R}) \right\}' \right] + E C_{\omega} (\phi'' - \frac{u_0'}{R}) - G J_T (\phi'' - \frac{u_0'}{R}) + \frac{E J_y}{R} (u_0'' + \frac{\phi}{R}) \\ - \left[\left(\frac{J_{Tz}}{F} N^0 + \frac{J_{Tz}}{J_x} M_x^0 \right) (\phi' - \frac{u_0'}{R}) \right]' + (M_x^0 - y_s N^0) (u_0'' + \frac{\phi}{R}) + M_{\omega}^0 \phi - m_z - m_{\omega}' = 0 \quad (14)$$

境界条件 $\theta = 0$ と ∞ において

$$\delta u_0 = 0 \quad \text{または} \quad \frac{1}{q} \left[(K_{yy} - \frac{K_{\omega\omega}}{R}) \ddot{u}_0' + (K_{\omega y} - \frac{K_{\omega\omega}}{R}) (\ddot{\phi}' - \frac{\ddot{u}_0'}{R}) \right] + \left[-E J_y (u_0'' + \frac{\phi}{R}) + \frac{E C_{\omega}}{R} (\phi'' - \frac{u_0'}{R}) - M_x^0 \phi \right]' \\ - \frac{1}{R} (G J_T + M_{\omega y}) (\phi' - \frac{u_0'}{R}) + (N^0 + \frac{M_x^0}{R}) u_0' - m_x^0 \phi - Q_x + m_y - \frac{m_{\omega}}{R} = 0 \quad (15)$$

$$\delta \phi = 0 \quad \text{または} \quad E J_y (u_0'' + \frac{\phi}{R}) + M_y = 0 \quad (16)$$

$$\delta \phi = 0 \quad \text{または} \quad \frac{1}{q} \left[K_{\omega y} \ddot{u}_0 + K_{\omega\omega} (\ddot{\phi}' - \frac{\ddot{u}_0'}{R}) \right] - \left[E C_{\omega} (\phi'' - \frac{u_0'}{R}) \right]' + (G J_T + M_{\omega y}) (\phi' - \frac{u_0'}{R}) - M_x^0 u_0' - M_{\omega}^0 u_0' \\ + m_{\omega}^0 \phi - T_z + m_{\omega} = 0 \quad (17)$$

$$\delta \phi_z = 0 \quad \text{または} \quad E C_{\omega} (\phi'' - \frac{u_0'}{R}) + M_{\omega} = 0 \quad (18)$$

以上で, $K_x = \int_F \frac{p}{R} y^2 dF$, $K_{xx} = \int_F \frac{p}{R} y^2 dF$, $K_{yy} = \int_F \frac{p}{R} x^2 dF$, $K_{xy} = K_{yx} = \int_F \frac{p}{R} x y dF$, $K_f = \int_F \frac{p}{R} dF$, $K_{\omega y} = \int_F \frac{p}{R} \omega x dF$, $K_{\omega\omega} = \int_F \frac{p}{R} \omega^2 dF$, $J_T = \int_F \left(\frac{R}{r} \right)^2 \{ (y - y_s)^2 + (x - \frac{\omega}{R})^2 \} dF$, $J_{Tz} = \int_F \left(\frac{R}{r} \right)^2 \{ (y - y_s)^2 + (x - \frac{\omega}{R})^2 \} (y - y_s) dF$, $M_{\omega y} = \int_F \frac{p}{R} \delta_0 \{ (y - y_s)^2 + (x - \frac{\omega}{R})^2 \} dF$, $M_{\omega\omega} = \int_F \frac{p}{R} (g_1^2 + g_2^2) dF$, r, x, y の原点は中立点, y_s は偏心距離 P の座標。これは慣用の記法に従うものとす。1) 薄肉の曲線断面の有限変位理論における変位場。論文集材料科学