(8) グラフ理論における補木の性質のマトリックス構造解析への応用

東北大学工学部　正員　佐武正雄
東北大学工学部　正員　○新関　茂

1. まえがき

有限要素法や差分法によって離散化された骨組あるいは連続体の節点(分割点)間の接続特性は，グラフ理論によって表現することができ，電気回路網と同様な解析が可能である。著者等は，このような立場から，グラフの木の性質を用いたマトリックス構造解析法を示した[1]。更に，グラフの木と双対的概念である補木の性質をマトリックス構造解析に応用することも可能である。グラフ理論を用いてマトリックス構造解析を行う方法の特徴は，構造全体に関する剛性方程式などを樹立せずに，グラフの性質だけを用いて直接解析できるところにある。本文では，補木の性質を応用したマトリックス構造解析について説明する。これは，骨組の解析などにしばしば応用される適合法の拡張と考えられる。

2. グラフの補木を用いたマトリックス構造解析の基礎理論

有限要素法や差分法によって離散化された骨組あるいは連続体の節点(分割点)間の接続関係は，一般に α_0 個の点と α_1 個の枝をもつグラフによって表わすことができ，グラフのループの個数は Euler-Poincaré 公式によって式(2.1)で与えられる。また，このグラフの接続マトリックスを ${}^t\mathbf{D}$ とすれば，式(2.2)に示すように，木の枝に関する部分マトリックス ${}^t\mathbf{D}_T$ $(\alpha_0\times(\alpha_1-\beta_1))$ と補木の枝に関する部分マトリックス ${}^t\mathbf{D}_L(\alpha_0\times\beta_1)$ とに分割することができる。以下同様に，添字 T と L はそれぞれ木および補木の枝に対応するベクトル又はマトリックスを示すものとする。$\mathbf{R}$ をループマトリックスとすれば，式(2.3)の関係により，接続マトリックスと単位マトリックス $\mathbf{I}_L(\beta_1\times\beta_1)$ を用いて式(2.4)のように記すことができる。荷重および内力を表わすベクトルをそれぞれ $\mathbf{P}$, $\boldsymbol{\tau}$ とすれば，平衡方程式(2.5)が成り立つ。式(2.2)，(2.5)により式(2.6)を得る。ここに，τ_L は不静定力に対応する内力である。また $\mathbf{T}$ は木マトリックスと呼ばれ，接続マトリックスと式(2.7)の関係にある。f_T と f_L をそれぞれ木および補木の部分に対応するフレキシビリティ・マトリックスとすれば，$\boldsymbol{\tau}$ と相対変位 $\mathbf{u}$ との間に式(2.8)が成り立つ。式(2.6)，(2.8)と適合条件(2.9)を用いて式(2.10)を得る。ここに，δ_L は，荷重 $\mathbf{P}$ を木に対応する接続で全て受けもった場合に補木の部分に生じる変形量を表わしている。

$$\beta_1=\alpha_1-\alpha_0+1 \tag{2.1}$$

$${}^t\mathbf{D}=[{}^t\mathbf{D}_T,\ {}^t\mathbf{D}_L] \tag{2.2}$$

$${}^t\mathbf{D}\mathbf{R}=0 \tag{2.3}$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_T\\ \mathbf{R}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-{}^t\mathbf{D}_T^{-1}\,{}^t\mathbf{D}_L\\ \mathbf{I}_L\end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{P}={}^t\mathbf{D}\boldsymbol{\tau} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{Bmatrix}\tau_T\\ \tau_L\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_T\\ \mathbf{R}_L\end{bmatrix}\tau_L+\begin{bmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{P} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{T}={}^t\mathbf{D}_T^{-1} \tag{2.7}$$

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_T\\ \mathbf{u}_L\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}f_T & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & f_L\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau_T\\ \tau_L\end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

$${}^t\mathbf{R}\mathbf{u}=\mathbf{0} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{F}\tau_L+\delta_L=\mathbf{0} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{F}={}^t\mathbf{R}f\mathbf{R} \tag{2.11}$$

$$\delta_L={}^t\mathbf{R}_T f_T\mathbf{T}\mathbf{P} \tag{2.12}$$

$$\mathbf{F}^{-1}=\mathbf{K}/|\mathbf{F}| \tag{2.13}$$

次に，$\mathbf{F}$ の逆マトリックスを式(2.13)の形式に記せば，$|\mathbf{F}|$ および マトリックス $\mathbf{K}$ の成分 K_{pq} は Binet-Cauchy 展開[2]を用いてそれぞれ式(2.14)，(2.15)のように記すことができる。ここに [⋯] は交代記号であり，操り返し表われる指標については和をとるものとする。したがって，$|\mathbf{F}|$ は $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m$ と $\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_m$ なる枝が補木となるような $f_{\lambda\kappa}$ の積の全ての組合せの代数和で，各項の符号は $R_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}$ と $R_{[\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_m]}$ の相対符号で与えられる。また，$\bar{t}(\bar{q})$ 等が閉路 q を開放したグラフでの補木を表わすものとして，K_{pq} は左指標が $\bar{t}(\bar{q})$，右指標が $\bar{t}(\bar{p})$ となるような $f_{\kappa\lambda}$ の全ての組合せの代数和であり，符号は $R_{[q\lambda_2\cdots\lambda_m]}$ と $R_{[p\kappa_2\cdots\kappa_m]}$ の相対符号によって定められる。ラーメン等

$$|\mathbf{F}|=R_{[\kappa_1\cdots\kappa_m]}(m!\,f_{\kappa_1\cdots\kappa_m})R_{[\lambda_1\cdots\lambda_m]} \tag{2.14}$$

$$K_{pq}=R_{[q\kappa_2\cdots\kappa_m]}(m!\,m\,f_{\kappa_1\cdots\kappa_m})R_{[p\lambda_2\cdots\lambda_m]} \tag{2.15}$$

$$\mathbf{w}={}^t\mathbf{T}(f_T-f_T\mathbf{R}_T\mathbf{F}^{-1}\,{}^t\mathbf{R}_T f_T)\mathbf{T}\mathbf{P} \tag{2.16}$$

の曲げ変形を考慮した有限要素解析の場合，ループ・マトリックスは要素の長さや方向余弦などを含み $R_{[k_1,\cdots k_m]}$ 等の積は符号ばかりでなく要素の長さや方向余弦も含むことになる.以上の考察により絶対変位 w は式(2.16)で与えられる.

3. 応用例

Poisson方程式を例とし，グラフの補木の差分法への応用について説明する．周辺から張力 S と一定面圧 p を受ける薄膜の撓み $w(x,y)$ は，Poisson方程式(3.1)で表わされる．境界では $w=0$ とする．一辺の長さ $h(=\ell/6)$ の正方形網目に差分法によって分割された薄膜(図-3.1)の対称性を考慮して，斜線部の接続関係をグラフで示せば図-3.2となり，各枝のフレキシビリティ $f_{\kappa\lambda}$ および各分割点に作用する荷重 $\mathbf{p}$ はそれぞれ式(3.2)，(3.3)によって与えられる．式(3.4)は，このグラフのループ・マトリックスであり，補木の総数は $|{}^t\mathbf{R}\,\mathbf{R}|=29$ である．図-3.2の太線で示した木をマトリックス表示すれば式(3.5)となる．式(2.11)に式(3.2)・(3.4)を代入すれば式(3.6)を得る．図-3.2のグラフの全ての補木の集合 $\bar{T}$ を求めれば

$\bar{T}$： 134, 135, 136, 138, 145, 147, 156, 157, 158, 167, 178, 234, 235, 236, 238, 245, 247, 256, 257, 258, 267, 278, 345, 347, 356, 357, 358, 367, 378,

したがって，これらの枝に対応するフレキシビリティ $f_{\kappa\lambda}$ を用い，式(2.14)により各項の符号は正であるから $|\mathbf{F}|=52$ を得る．K_{11} は，式(2.15)により，$\bar{T}$ の中から枝2を含む項を捜し出し，これから枝2を除いた集合(34, 35, 36, 38, 45, 47, 56, 57, 58, 67, 78)を用いて $K_{11}=19$ となる．対角要素 K_{pp} の場合，式(2.15)により各項の符号は全て正である．次に，K_{12} について考察すれば，$\bar{T}$ の中から枝5を含み，枝2を含まない項を捜し出し，枝5と枝2を交換した項が再び $\bar{T}$ の中にあれば，枝2を省いたものを求めればよい．このようにして，集合(34, 36, 38)を得る．これらの項の符号は，その項を含む枝をもとのグラフから開放除去して残る閉路の中で枝2と5が同方向ならば正，反対方向ならば負として定められる．今の場合，図-3.3により各項の符号は全て正であり，$K_{12}=4$ となる．以下同様である．式(3.2)〜(3.5)，(3.7)を式(2.16)に代入して変位(3.8)を得る．

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{p}{S}=0 \qquad (3.1)$$

$$\left.\begin{aligned} &f_{11}=f_{22}=f_{33}=f_{44}=f_{55}=f_{66}=1/S\\ &f_{77}=f_{88}=f_{99}=2/S \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

$${}^t\mathbf{p}=\frac{p}{8}(4,8,4,4,4,1) \qquad (3.3)$$

$${}^t\mathbf{R}=\begin{array}{c} \\ \dot{1}\\ \dot{2}\\ \dot{3} \end{array}\begin{array}{ccccccccc} 1&3&4&7&8&9&2&5&6\\ \hline -1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot\\ \cdot&-1&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot\\ \cdot&-1&-1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1 \end{array} \qquad (3.4)$$

$$\mathbf{T}=\begin{array}{c} \\ 1\\ 3\\ 4\\ 7\\ 8\\ 9 \end{array}\begin{array}{cccccc} \dot{1}&\dot{2}&\dot{3}&\dot{4}&\dot{5}&\dot{6}\\ \hline 1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&1&1&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&1&1&1\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1 \end{array} \qquad (3.5)$$

$$\mathbf{F}=\frac{1}{S}\begin{bmatrix} 3&-1&-1\\ -1&4&3\\ -1&3&7 \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

$$\mathbf{F}^{-1}=\frac{S}{52}\begin{bmatrix} 19&4&1\\ 4&20&-8\\ 1&-8&11 \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

$${}^t\mathbf{w}=\left(\frac{99}{104},\frac{73}{52},\frac{17}{8},\frac{20}{13}\ \frac{61}{26},\frac{135}{52}\right)\frac{ph^2}{S} \qquad (3.8)$$

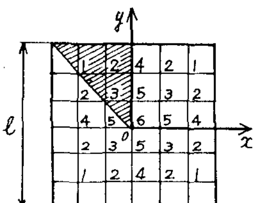

図-3.1

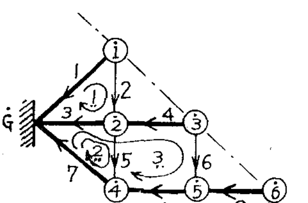

図-3.2

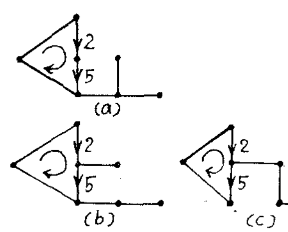

図-3.3

4. あとがき

グラフの補木を用いたマトリックス構造解析法の有効性は，グラフの全ての補木を容易に求め得るかどうかに依存している．相互結合が存在しない場合は，たたみ込み算[3]によって補木積和を求めるのが比較的容易なようである．又，ここで示した方法は枝のフレキシビリティ $f_{\kappa\lambda}$ が文字定数で与えられた場合にも全く同様に応用可能である．

参考文献　(1) 佐武・新関：日本鋼構造協会第4回大会研究集会，マトリックス構造解析法研究発表論文集，1975, PP.1-6 (2) 小野寺・大類：電気回路網基礎理論，学献社，1967. (3) 服部・佐々木：電気通信学会論文誌A, 53A, 1970, PP1-8