

(6) 構造物の形状の最適化に関する研究

東北大学工学部 正 員 佐武正雄
東北大学工学部 正 員 新聞 茂
東北大学工学部 学生員 ○宇屋 穂彦

1. まえがき

最適設計は、従来、主要条件を規定した骨組や矩形あるいは円形などの比較的単純な形状の連続体の重量や固有振動数を最適化しようとするものが多かったように思われる。しかし、有限要素法の発展に伴って、複雑な形状の連続体の重量やポテンシャルエネルギーに関する最適形状の解析も行なわれるようになってきた。

Zienkiewicz¹⁾は有限要素法を用いて、バットレス擁壁等の最小重量設計を行っているが、これは形状係数を設計変数として導入することによって、形状の解析を簡略化したものである。また瀬口等²⁾は体積および表面積一定として、ポテンシャルエネルギーが最小となるような形状の解析を行っており、尾田³⁾は重量一定の制約条件のもとに、応力分布が可能な限り均一となるような形状を有限要素のパターン変換によって求めている。本研究は、尾田の方法を拡張して、体積および表面積を一定とせず、実際の設計上の制約条件のみを加え、連続体の形状の最適化を試みたいのである。

2. 構造物の形状の最適化手法とその応用例

はじめに、有限要素に分割された連続体の応力分布が可能な限り均一となるように、各要素の形状を変更する方法について説明する。図-1に計算手順の概略を示す。各要素の形状変更は要素の応力分布を、von Misesの相当応力で代表させて、基準相当応力と比較して行うものとする。簡単のため、三角形要素を用いた場合について説明する。要素形状変更は図-2に示すように、図心を原点とする比例変換方式を採用する。形状の変更が大きくなければ、形状変更前の節点変位と変更後の節点変位は近似的に等しいと仮定でき、形状変更前の要素の応力分布 $\{\sigma\}$ と変更後の応力分布 $\{\sigma'\}$ との間には次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma'\}_i &= (1/\lambda_i) \{\sigma\}_i \\ \lambda_i &= A_i'/A_i \end{aligned} \right\} \quad \text{---- (1)}$$

ここに i は要素番号、 A_i は形状変更前の要素面積、 A_i' は変更後の要素面積である。式(1)は要素の面積 A_i と A_i' の間に次の関係式が成立することを意味する。

$$A_i' = A_i (\bar{\sigma}_i/\bar{\sigma}_0) \quad \text{---- (2)}$$

ここに $\bar{\sigma}_0$ は基準とする相当応力で、 $\bar{\sigma}_i$ は要素 i の相当応力である。実際の計算では式(2)で表わされる面積変化を全要素に与えることは困難なので、面積変化を節点位置ベクトルの変化に置換して形状変更を行う。図心を原点とするベクトル $\vec{a}_i$ を $(\bar{\sigma}_i/\bar{\sigma}_0)\vec{a}_i$ にすれば、式(2)によって面積が変化するので、各節点は次のベクトル量だけ移動させればよいことになる。

$$\vec{b}_i = \{(\bar{\sigma}_i/\bar{\sigma}_0) - 1\} \vec{a}_i \quad (i=1,2,3) \quad \text{---- (3)}$$

構造物全体において任意の節点 R は、 R を囲むすべての要素からベクトル $\vec{b}_R$ の移動を強制され、節点 R の移動量は各方向の平均として次の $\bar{b}_R$ で表わされるものとする。

$$\bar{b}_R = (1/n) \sum_{i=1}^n \vec{b}_i \quad (n \text{ は } R \text{ を囲む要素の数}) \quad \text{---- (4)}$$

次に例として、接水面と堤高の与えられた重力ダム形状の最適化について説明する。コンクリートのヤング率 $E = 1.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$

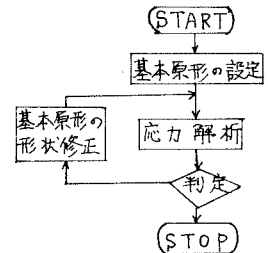


図-1 計算手順の概略

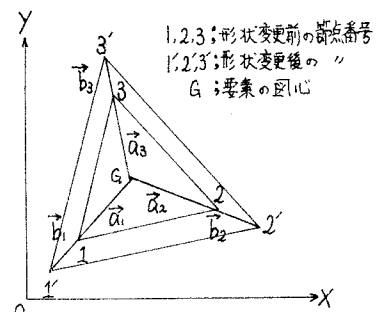


図-2

ポアソン比 $\nu = 0.15$, 単位体積重量 $w = 2.3 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$, 荷重は水圧と自重とする。基本原形として矩形を与えて、図-3に要素分割を示した。節点1, 2, ..., 6は移動せず、12, 18, 24, 30はx方向のみ移動可能、残りの節点はx, y方向とも移動可能である。節点移動量は要素形状の変更が乱数にならないように、式(4)で得られる値の1/10とした。なお各要素の面積で、最大のものと最小のものそれぞれ $A_{\max}$, $A_{\min}$ として、比 $A_{\max}/A_{\min}$ が2.0になったならば、要素面積が均等になるように再分割して、計算を行った。図-4は形状の変化状況、図-5は収束状況を示している。式(5)が満足された時、収束したとする。

$$|\beta DN_{n+1} - \beta DN_n| < \epsilon \quad ; \quad \beta DN = \sum_{k=1}^m (\bar{\sigma}_k - \bar{\sigma}_0)^2 \quad \text{----- (5)}$$

ここにNは、繰り返し回数、mは要素数である。図-5から βDN が次第に小さくなっていくことがわかる。

3. 変分原理による検討

ここでは汎関数を用いて構造物形状の最適化手法について若干の考察を行う。変位ベクトル U , 物体力 F , 表面力 T , 歪を成分とするベクトル ϵ , 弾性係数マトリックス E とすれば、上記の連続体の応力分布を可能な限り均一化しようとする問題は

$$\Pi(U) = \frac{1}{2} \int_A \epsilon^T E \epsilon dA - \int_A F U dA - \int_{\partial A} T U dS \quad \text{---- (6)}$$

$$J[\partial A] = \int_A \{ \bar{\sigma}(x, y; \partial A) - \bar{\sigma}_0 \}^2 dA \quad \text{---- (7)}$$

と同時に、制約条件

$$\sigma_y(y=0) \leq 0 \quad \text{----- (8)}$$

のもとに最小化しようすることに等価と考えられる。ここに、Aは構造物の占める領域(ここでは面積)、 ∂A は境界である。また、ポテンシャルエネルギーが最小となる形状を解析しようとする場合は式(8)のもとにおける可変領域変分問題

$$\Pi(U; \partial A) = \frac{1}{2} \int_A \epsilon^T E \epsilon dA - \int_A F U dA - \int_{\partial A} T U dS \quad \text{---- (9)}$$

として表現できる。境界上の節点が与えられるのは、内部の節点は境界形状に従属して一意的に定まるものとして、有限要素法で離散化し、形状の最適化を行う場合、式(9)を用いるならば比較的簡単に変位と座標に関する高次の代数方程式を導くことが可能と思われる。しかし汎関数(6),(7)の場合、このような高次代数方程式を導くことは、一般に困難であり、前述のような要素形状を徐々に変更することにより、式(6),(7)の最小化を行うのが適当と思われる。

4. あとがき

設計上の制約条件のみを与えて、可能な限り応力分布が均一となるような構造物の形状を決定する方法について説明したが、基準相当応力は、破壊強度安全率を考慮して定めるのが合理的であると思われる。相当応力は Von Mises の値によるものを採用したが、この重力ダムの場合では、全体に引張応力が生じないので、その他の条件、例えば Drucker-Prager の条件などの相当応力を用いた場合でも、一軸圧縮状態では同一の相当応力が生じるようにすれば、ほぼ同様な結果が得られると思われる。また、この応用例では単に応力分布が均一となるばかりではなく、自重および水圧の合力がミドルサードに入っているような考慮も行っている。ポテンシャルエネルギーが最小となる形状と応力分布が可能な限り均一となる形状は、近似的に同様の意味をもつものと思われるが、どのような条件で形状を最適化するのが合理的であるか、どのような手法を用いるのが有効であるかについては、更に検討を必要とするように思われる。

参考文献 1) O.C. Zienkiewicz, Shape Optimization and Sequential Linear Programming, Optimum Structural Design (Theory and Application), ed. by R.H. Gallagher and O.C. Zienkiewicz, John Wiley & Sons, 1973, PP 109-126
 2) 瀬口等, 変分原理による形状決定問題の離散化モデル, 第25回応用力学連合講演会, E46, 1975, PP 391-392
 3) 尾田, 有限要素法による強度的最適設計の研究, 日本機械学会講演論文集, NO740-2, 1974, PP 173-176

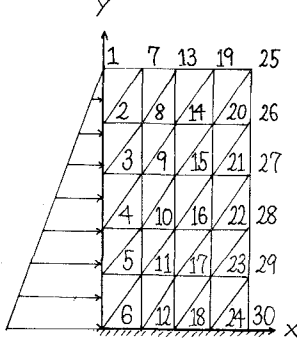


図-3 基本原形と要素分割

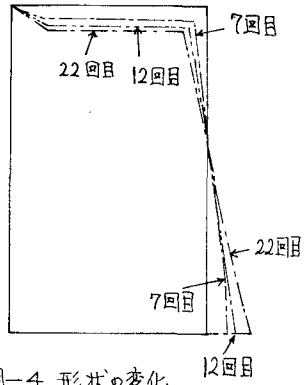


図-4 形状の変化
 $\bar{\sigma}_0 = 20.0$

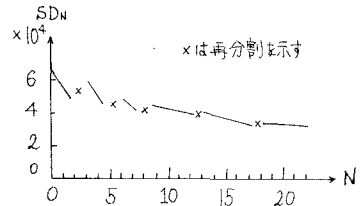


図-5 SDNの変動