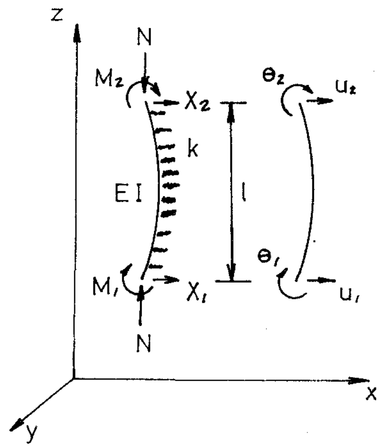
(4) 種々の境界条件と変断面を有する弾性床上の棒の座屈解析

岩手大学工学部　正員　宮本　裕
学生員　○安彦　敏郎

本研究は，軸方向圧縮力を受ける弾性床上の棒について，仕事の式を求め，カスティリアノの定理を用いて，剛性マトリックスを誘導し，それを用いて，種々の境界条件と変断面を有する弾性床上の棒の座屈解析を行なったものである。

1. 剛性マトリックスの誘導



図のように，基礎係数kの弾性床上にある棒が，軸方向圧縮力Nを受けている時の仕事の式は，内力による仕事＝外力による仕事とおいて，次のようになる。

$$W_1+W_2 = X_1U_1+X_2U_2+M_1\theta_1+M_2\theta_2+W_3 \qquad \cdots (1)$$

ここで，W_1は，棒の曲げエネルギーを示し

$$W_1=\frac{1}{2}\iiint \varepsilon\sigma\, dx\, dy\, dz$$

W_2は，ばねのひずみエネルギーを示し

$$W_2=\frac{1}{2}\int k u\cdot u\, dx$$

W_3は，荷重による仕事を示し

$$W_3=\frac{1}{2}\int N\left(\frac{du}{dz}\right)^2 dz$$

なお，変位関数を　$u=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3$　$\cdots (2)$

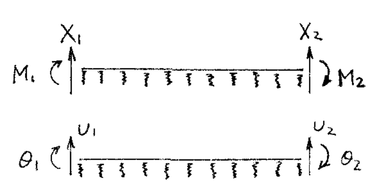
とする。そうすると $\varepsilon=-x\frac{d^2u}{dz^2}$ および $\sigma=E\varepsilon$ となる

式(1)を，変位 $u_1,\theta_1,u_2,\theta_2$ で，それぞれ偏微分すれば，力 X_1,M_1,X_2,M_2が求められる。

これらをマトリックス表示すると，次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = EI\begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} \frac{13l}{35} & -\frac{11l^2}{210} & \frac{9l}{70} & \frac{13l^2}{420} \\ -\frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} & -\frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} \\ \frac{9l}{70} & -\frac{13l^2}{420} & \frac{13l}{35} & \frac{11l^2}{210} \\ \frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} & \frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$-N\begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$



式(2)の第1項は棒の曲げの剛性マトリックス，第2項は，ばねの剛性マトリックス，第3項は座屈荷重による剛性マトリックスを表わす。　特に $k=0$ として第2項を無視すると，棒の座屈の剛性マトリックスとなる。

2. 座屈荷重の計算

この剛性方程式から，座屈荷重 N を求める問題は

$$[K]\{x\}=N[A]\{x\} \qquad \cdots (4)$$

から N を求める一般固有値問題となる。これを，コレスキー法を用いて

$$[M]\{y\}=N\{y\} \qquad \cdots (5)$$

という標準固有値問題になおして N を求める。

式(4)から式(5)を求めるには，コレスキー分解によって $[A]=[L][L^T]$ とする。

また，$\{x\}=[L^T]^{-1}\{y\}$ とおくと，式(4)は

$$[K][L^T]^{-1}\{y\}=N[L][L^T][L^T]^{-1}\{y\}=N[L]\{y\}$$

両辺に左から $[L]^{-1}$ をかけて

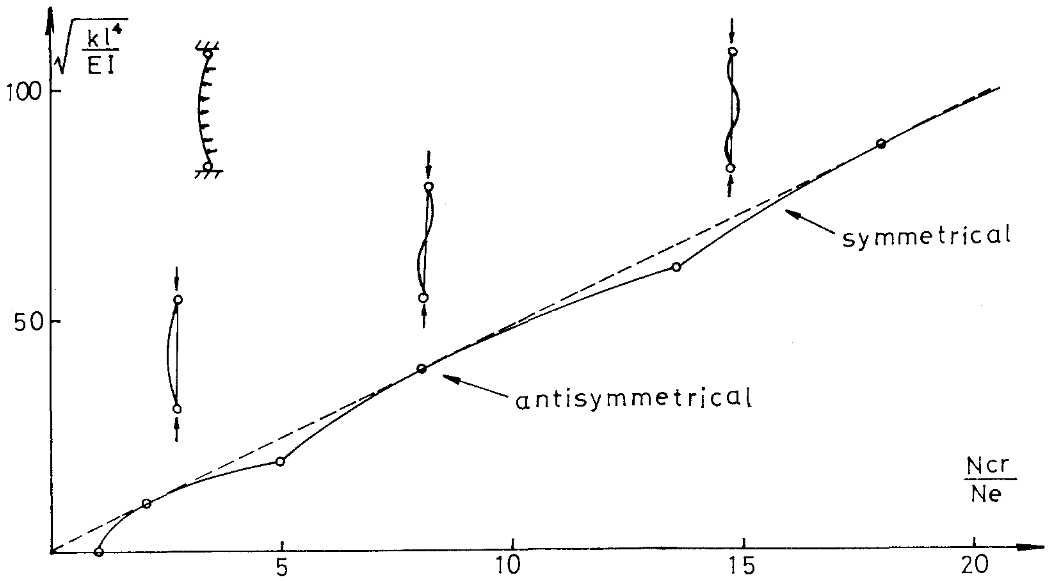
$$[L]^{-1}[K][L^T]^{-1}\{y\}=N[L]^{-1}[L]\{y\}=N\{y\}$$

という標準固有値問題となる。

3. 計算例

この式をプログラムに組み，種々の条件の弾性床上の棒の座屈荷重を求めることができる。

ここでは，両端ヒンジの弾性床上桁について示す。なお N_{cr} は座屈荷重，N_e はオイラーの座屈荷重 $\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$ を示す。



この計算結果は，先の微分方程式から求めた剛性マトリックスを用いて計算した値2)と一致し，正しいことが確かめられる。なお計算には北大,東北大の大型計算機センターと岩手大学土木工学科 OKITAC 4300C を使った。

また，この研究の一部を土木科3年の菊池光君に手つだっていただいたことを感謝する。

参考文献　1) 有限要素法における最近の固有値問題解法：　山田嘉昭，佐藤俊雄，生産研究 26 巻 6 号

2) 弾性床上の棒の座屈の剛性マトリックス解析法について：渡辺，宮本，安彦　第30回講演概要集