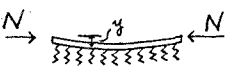
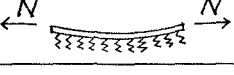
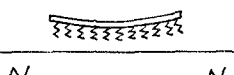
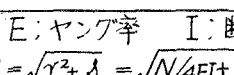


(2) 桁に關する4階の微分方程式の剛性マトリックスについて

岩手大学工学部 正 員 宮本 裕  
同 学生員 島津雅洋  
同 正 員 相沢治郎

桁に關する4階の微分方程式は、桁にかかる軸力の有無やその正負、また弾性床にあるかないかなどを考えれば、その組み合わせから、6つの式が考えられる。ここでは、それらの式から導かれた剛性マトリックスの間の關係を整理しまとめてみた。

1. 桁に關する4階の微分方程式と、その一般解 ———— それぞれの状態における微分方程式とその一般解は表-1 の様になる。但し、式(1)と式(3)では  $\sqrt{R/4EI} - \sqrt{N/4EI} < 0$  と仮定した。 表-1

|   | 桁 の 状 態                                                                             | 微 分 方 程 式                               | 一 般 解 ( $C_1, C_2, C_3$ 及び $C_4$ は任意定数)                                                                                                            |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A |    | $EI y'''' + N y'' + k y = 0$<br>--- (1) | $EI y = C_1 \sin(\alpha + \beta)x + C_2 \cos(\alpha + \beta)x + C_3 \sin(\alpha - \beta)x + C_4 \cos(\alpha - \beta)x$ --- (2)                     |
| B |    | $EI y'''' - N y'' + k y = 0$<br>--- (3) | $EI y = C_1 \text{sh}(\alpha + \beta)x + C_2 \text{ch}(\alpha + \beta)x + C_3 \text{sh}(\alpha - \beta)x + C_4 \text{ch}(\alpha - \beta)x$ --- (4) |
| C |    | $EI y'''' + k y = 0$<br>--- (5)         | $EI y = (C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x) \text{sh} \mu x + (C_3 \sin \mu x + C_4 \cos \mu x) \text{ch} \mu x$ --- (6)                             |
| D |    | $EI y'''' + N y'' = 0$<br>--- (7)       | $EI y = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 x + C_4 x$ --- (8)                                                                           |
| E |  | $EI y'''' - N y'' = 0$<br>--- (9)       | $EI y = C_1 \text{sh} \lambda x + C_2 \text{ch} \lambda x + C_3 x + C_4 x$ --- (10)                                                                |
| F |  | $EI y'''' = 0$<br>--- (11)              | $EI y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$ --- (12)                                                                                                  |

但し、E: ヤング率 I: 断面2次モーメント N: 軸力 k: 弾性床のばね定数

$$\alpha = \sqrt{\gamma^2 + \delta} = \sqrt{N/4EI + \sqrt{R/4EI}} \quad \beta = \sqrt{\gamma^2 - \delta} = \sqrt{N/4EI - \sqrt{R/4EI}} \quad \mu = \sqrt{R/4EI} \quad \lambda = \sqrt{N/EI}$$

2. 剛性マトリックス

式(2)、式(4)、式(6)、及び式(8)、式(10)、式(12) から、Anfang Parameter 法を用いると、それぞれの剛性マトリックスは、以下の様になる。節点力と節点変位の符号は、図-1 に示すものを正とする。

A). 軸圧縮力を受け、弾性床上の桁

係数  $\lambda a = (\alpha^2 - \beta^2) / (\alpha^2 \sin^2 \alpha l - \beta^2 \sin^2 \beta l)$

|                   | $y(0)$                                                                               | $y'(0)$                                                                                                          | $y(l)$                                                                                | $y'(l)$                                                                                                           |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{Q(0)}{EI}$ | $2\alpha\beta(\beta \sin \alpha l \cos \alpha l + \alpha \sin \beta l \cos \beta l)$ | $-(\beta^2 \sin^2 \alpha l + \alpha^2 \sin^2 \beta l)$                                                           | $-2\alpha\beta(\beta \sin \alpha l \cos \beta l + \alpha \cos \alpha l \sin \beta l)$ | $-2\alpha\beta \sin \alpha l \sin \beta l$                                                                        |
| $\frac{M(0)}{EI}$ |                                                                                      | $\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha \sin \alpha l \cos \beta l - \beta \sin \beta l \cos \alpha l)$ | $2\alpha\beta \sin \alpha l \sin \beta l$                                             | $\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} (\beta \sin \alpha l \cos \alpha l - \alpha \cos \alpha l \sin \beta l)$ |
| $\frac{Q(l)}{EI}$ |                                                                                      |                                                                                                                  | $2\alpha\beta(\beta \sin \alpha l \cos \alpha l + \alpha \sin \beta l \cos \beta l)$  | $\beta^2 \sin^2 \alpha l + \alpha^2 \sin^2 \beta l$                                                               |
| $\frac{M(l)}{EI}$ |                                                                                      |                                                                                                                  |                                                                                       | $\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha \sin \beta l \cos \alpha l - \beta \sin \alpha l \cos \beta l)$  |

Sym.

--- (A)

B). 軸引張力を受け、弾性床上的の桁

$$\text{係数 } t_b = (\alpha^2 - \beta^2) / (\beta^2 \text{sh} \alpha l - \alpha^2 \text{sh} \beta l)$$

|                   | $y(0)$                                                                                                   | $y'(0)$                                                                                                                              | $y(l)$                                                                                                   | $y'(l)$                                                                                                                               |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{Q(0)}{EI}$ | $2\alpha\beta(\beta \text{sh} \alpha l \text{ch} \alpha l + \alpha \text{sh} \beta l \text{ch} \beta l)$ | $-(\alpha^2 \text{sh}^2 \beta l + \beta^2 \text{sh}^2 \alpha l)$                                                                     | $2\alpha\beta(\alpha \text{ch} \alpha l \text{sh} \beta l + \beta \text{sh} \alpha l \text{ch} \beta l)$ | $-2\alpha\beta \text{sh} \alpha l \text{sh} \beta l$                                                                                  |
| $\frac{M(0)}{EI}$ |                                                                                                          | $\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} (\beta \text{sh} \alpha l \text{ch} \alpha l - \alpha \text{sh} \beta l \text{ch} \beta l)$ | $2\alpha\beta \text{sh} \alpha l \text{sh} \beta l$                                                      | $\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha \text{ch} \alpha l \text{sh} \beta l - \beta \text{sh} \alpha l \text{ch} \beta l)$  |
| $\frac{Q(l)}{EI}$ |                                                                                                          | Sym.                                                                                                                                 | $2\alpha\beta(\alpha \text{sh} \beta l \text{ch} \beta l + \beta \text{sh} \alpha l \text{ch} \alpha l)$ | $(\alpha^2 \text{sh}^2 \beta l + \beta^2 \text{sh}^2 \alpha l)$                                                                       |
| $\frac{M(l)}{EI}$ |                                                                                                          |                                                                                                                                      |                                                                                                          | $\frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha \text{sh} \beta l \text{ch} \beta l - \beta \text{sh} \alpha l \text{ch} \alpha l)$ |

--- (b)

C). 弾性床上的の桁

$$\text{係数 } t_c = (\text{sh}^2 \mu l - \sin^2 \mu l)^{-1}$$

|                   | $y(0)$                                                            | $y'(0)$                                                         | $y(l)$                                                             | $y'(l)$                                                          |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $\frac{Q(0)}{EI}$ | $4\mu^3(\sin \mu l \cos \mu l + \text{sh} \mu l \text{ch} \mu l)$ | $-2\mu^2(\text{sh}^2 \mu l + \sin^2 \mu l)$                     | $-4\mu^3(\sin \mu l \text{ch} \mu l + \cos \mu l \text{sh} \mu l)$ | $-4\mu^2 \sin \mu l \text{sh} \mu l$                             |
| $\frac{M(0)}{EI}$ |                                                                   | $2\mu(\text{sh} \mu l \text{ch} \mu l - \sin \mu l \cos \mu l)$ | $4\mu^2 \sin \mu l \text{sh} \mu l$                                | $-2\mu(\cos \mu l \text{sh} \mu l - \sin \mu l \text{ch} \mu l)$ |
| $\frac{Q(l)}{EI}$ |                                                                   | Sym.                                                            | $4\mu^3(\cos \mu l \sin \mu l + \text{ch} \mu l \text{sh} \mu l)$  | $2\mu^2(\text{sh}^2 \mu l + \sin^2 \mu l)$                       |
| $\frac{M(l)}{EI}$ |                                                                   |                                                                 |                                                                    | $2\mu(\text{sh} \mu l \text{ch} \mu l - \cos \mu l \sin \mu l)$  |

--- (c)

D). 軸圧縮力を受ける桁

$$\text{係数 } t_d = (2 - 2 \cos \lambda l - \lambda l \sin \lambda l)^{-1}$$

|                   | $y(0)$                     | $y'(0)$                                             | $y(l)$                                              | $y'(l)$                                |
|-------------------|----------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------|
| $\frac{Q(0)}{EI}$ | $\lambda^3 \sin \lambda l$ | $-\lambda^2(1 - \cos \lambda l)$                    | $-\lambda^3 \sin \lambda l$                         | $\lambda^2(\cos \lambda l - 1)$        |
| $\frac{M(0)}{EI}$ |                            | $-\lambda(\lambda \cos \lambda l - \sin \lambda l)$ | $-\lambda^2(\cos \lambda l - 1)$                    | $-\lambda(\sin \lambda l - \lambda l)$ |
| $\frac{Q(l)}{EI}$ |                            | Sym.                                                | $\lambda^3 \sin \lambda l$                          | $-\lambda^2(\cos \lambda l - 1)$       |
| $\frac{M(l)}{EI}$ |                            |                                                     | $-\lambda(\lambda \cos \lambda l - \sin \lambda l)$ | $-\lambda(\sin \lambda l - \lambda l)$ |

--- (d)

E). 軸引張力を受ける桁

$$\text{係数 } t_e = (2 - 2 \text{ch} \lambda l + \lambda l \text{sh} \lambda l)^{-1}$$

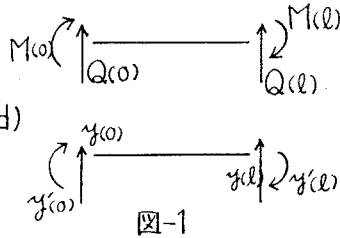
|                   | $y(0)$                          | $y'(0)$                                                      | $y(l)$                                                       | $y'(l)$                                    |
|-------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\frac{Q(0)}{EI}$ | $\lambda^3 \text{sh} \lambda l$ | $\lambda^2(1 - \text{ch} \lambda l)$                         | $-\lambda^3 \text{sh} \lambda l$                             | $\lambda^2(1 - \text{ch} \lambda l)$       |
| $\frac{M(0)}{EI}$ |                                 | $\lambda(\lambda \text{ch} \lambda l - \text{sh} \lambda l)$ | $-\lambda^2(1 - \text{ch} \lambda l)$                        | $\lambda(\text{sh} \lambda l - \lambda l)$ |
| $\frac{Q(l)}{EI}$ |                                 | Sym.                                                         | $\lambda^3 \text{sh} \lambda l$                              | $-\lambda^2(1 - \text{ch} \lambda l)$      |
| $\frac{M(l)}{EI}$ |                                 |                                                              | $\lambda(\lambda \text{ch} \lambda l - \text{sh} \lambda l)$ | $\lambda(\text{sh} \lambda l - \lambda l)$ |

--- (e)

F). 桁

|                   | $y(0)$   | $y'(0)$  | $y(l)$    | $y'(l)$  |
|-------------------|----------|----------|-----------|----------|
| $\frac{Q(0)}{EI}$ | $12/l^3$ | $-6/l^2$ | $-12/l^3$ | $-6/l^2$ |
| $\frac{M(0)}{EI}$ |          | $4/l$    | $6/l^2$   | $2/l$    |
| $\frac{Q(l)}{EI}$ |          | Sym.     | $12/l^3$  | $-6/l^2$ |
| $\frac{M(l)}{EI}$ |          |          |           | $4/l$    |

--- (f)



3. 各剛性マトリックスの関係. i).  $\alpha \rightarrow \alpha i, \beta \rightarrow \beta i$

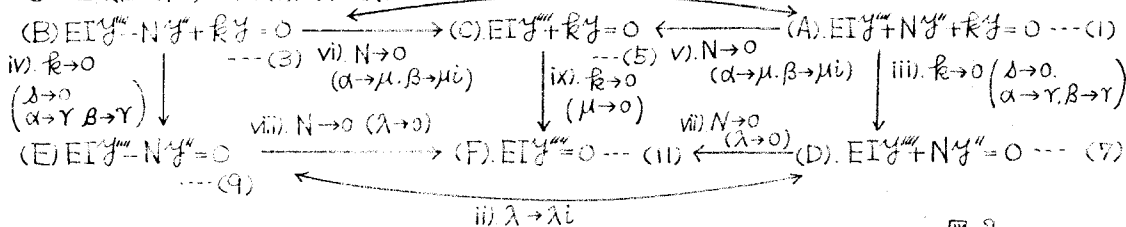


図-2

i). 式(a)から式(b)への変換. またはその逆の変換.

$\sin(ix) = (e^{i(ix)} - e^{-i(ix)})/2i = i \operatorname{sh} x$ ,  $\cos(ix) = (e^{i(ix)} + e^{-i(ix)})/2 = \operatorname{ch} x$  だから, 式(2)に  $\alpha \rightarrow i\alpha$ ,  $\beta \rightarrow i\beta$  とすれば, 式(2)と式(4)は同じ式となる. 従って, 式(a)に  $\alpha \rightarrow i\alpha$ ,  $\beta \rightarrow i\beta$  とすることで式(b)が導かれる. ここで, 剛性マトリックスの要素を  $k_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq 6$ ) とする. 式(a)の  $k_{12}$  に対し,  $\alpha \rightarrow i\alpha$ ,  $\beta \rightarrow i\beta$  とすれば,  $t_a \rightarrow \{(-\alpha^2) - (-\beta^2)\} / \{-\alpha^2 \sin^2 i\beta l - (-\beta^2 \sin^2 i\alpha l)\} = (\alpha^2 - \beta^2) / (\beta^2 \operatorname{sh}^2 \alpha l - \alpha^2 \operatorname{sh}^2 \beta l) = t_b$ .

$\beta^2 \sin^2 \alpha l + \alpha^2 \sin^2 \beta l \rightarrow -\beta^2 \sin^2 i\alpha l - \alpha^2 \sin^2 i\beta l = \beta^2 \operatorname{sh}^2 \alpha l + \alpha^2 \operatorname{sh}^2 \beta l$ . 従って,  $k_{12} \rightarrow -t_b \times (\beta^2 \operatorname{sh}^2 \alpha l + \alpha^2 \operatorname{sh}^2 \beta l)$  となり, 式(b)の  $k_{12}$  と一致する. 他の要素も同様にして変換できる. 逆もまた同様である.

ii). 式(d)から式(e)への変換. またはその逆の変換. — 式(8)と式(10)を比較すれば, i)と同様に,  $\lambda \rightarrow \lambda i$  とすることで, 式(d)から式(e), あるいはその逆に変換できることわかる.

iii). 式(a)から式(d)への変換

$k \rightarrow 0$  とすると, 式(a)から式(d)が導かれる. 式(a)において  $k \rightarrow 0$  とすると,  $\alpha = \sqrt{r^2 + \delta} = \sqrt{N/4EI} + \sqrt{k/4EI}$ ,  $\beta = \sqrt{r^2 - \delta} = \sqrt{N/4EI} - \sqrt{k/4EI}$  だから,  $\alpha \rightarrow r$ ,  $\beta \rightarrow r$ . 従って  $\lim_{k \rightarrow 0} t_a = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{r^2 + \delta - (r^2 - \delta)\} / \{(r^2 + \delta) \times \sin^2 \sqrt{r^2 + \delta} l - (r^2 - \delta) \sin^2 \sqrt{r^2 - \delta} l\} = 0/0$ . これは不定形であるから, ロピタルの定理より,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{d\delta} (\text{分子}) = 2$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{d\delta} (\text{分母}) = 1 - \cos 2rl - rl \sin 2rl$ .  $r = \sqrt{N/4EI} = \lambda/2$  から,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} t_a = 2 / \{(-\lambda/2) l \sin \lambda l + 1 - \cos \lambda l\} = 4 / (2 - 2 \cos \lambda l - \lambda l \sin \lambda l) = 4 t_b$  となる. よって,  $\lim_{k \rightarrow 0} 2\alpha\beta (\beta \sin \alpha l \cos \alpha l + \alpha \sin \beta l \cos \beta l) = 2r^2 (r \times \sin rl \cos rl + r \sin rl \cos rl) = 2r^3 \sin 2rl = (1/4) \lambda^3 \sin \lambda l$  だから,  $\lim_{k \rightarrow 0} k_{11} = 4 t_b \times (1/4) \lambda^3 \sin \lambda l = t_b \lambda^3 \sin \lambda l$ . これは式(d)の  $k_{11}$  と一致する. 他の要素も同様にして変換できる.

iv). 式(b)から式(e)への変換. —  $k \rightarrow 0$ , すなわち  $\alpha \rightarrow r$ ,  $\beta \rightarrow r$ ,  $\delta \rightarrow 0$  として iii)と同様な手法を用いる.

v). 式(a)から式(c)への変換

$N \rightarrow 0$  とすると, 式(a)から式(c)が導かれる. 式(a)において  $N \rightarrow 0$  とすると,  $\alpha = \sqrt{k/4EI} = \mu$ ,  $\beta = \sqrt{-k/4EI} = \mu i$ . よって,  $\lim_{N \rightarrow 0} t_a = \{\mu^2 - (\mu i)^2\} / \{\mu^2 \sin^2 i\mu l - (\mu i)^2 \sin^2 \mu l\} = 2 \cdot (\sin^2 \mu l - \operatorname{sh}^2 \mu l)^{-1} = 2 t_c$ . また,  $\lim_{N \rightarrow 0} 2\alpha\beta (\beta \sin \alpha l \cos \alpha l + \alpha \sin \beta l \cos \beta l) = 2\mu^2 i (\mu i \sin \mu l \cos \mu l + \mu \sin i\mu l \cos i\mu l) = -2\mu^3 (\sin \mu l \cos \mu l + \operatorname{sh} \mu l \operatorname{ch} \mu l)$  だから, 式(a)の  $k_{11}$  が式(c)の  $k_{11}$  に変換されることわかる. 他の要素も同様にして変換できる.

vi). 式(b)から式(e)への変換. — vi)と同様に,  $N \rightarrow 0$ , すなわち  $\alpha \rightarrow \mu$ ,  $\beta \rightarrow \mu i$  とする.

vii). 式(d)から式(f)への変換

$N \rightarrow 0$  とすればよい.  $N \rightarrow 0$  のとき,  $\lambda = \sqrt{N/EI} \rightarrow 0$  だから, 式(d)の  $k_{11} = \lambda^3 \sin \lambda l / (2 - 2 \cos \lambda l - \lambda l \sin \lambda l)$  より,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} k_{11} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} k_{11} = 0/0$ . これは不定形. 従って,  $k_{11}$  の分子, 分母を4階まで  $\lambda$  で微分してロピタルの定理を使えば,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} k_{11} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d^4}{d\lambda^4} (\text{分子}) / \frac{d^4}{d\lambda^4} (\text{分母}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (6l \cos \lambda l + 18l \cos \lambda l - 18\lambda l^2 \sin \lambda l - 18\lambda l^3 \sin \lambda l - 9\lambda^2 l^3 \cos \lambda l + 3\lambda^2 l^4 \sin \lambda l) / (2l^4 \cos \lambda l - \lambda l^5 \sin \lambda l) = 24l / 2l^4 = 12/l^3$ . これは式(f)の  $k_{11}$  である. 他の要素も同様にして変換できる.

viii). 式(e)から式(f)への変換. —  $N \rightarrow 0$ , すなわち  $\lambda \rightarrow 0$  とし, vii)と同様の手法を用いる.

ix). 式(c)から式(f)への変換. —  $k \rightarrow 0$  のとき  $\mu = \sqrt{k/4EI} \rightarrow 0$  だから, vii)と同様に, 要素の分子, 分母をそれぞれ  $\mu$  で4階まで微分し,  $\mu \rightarrow 0$  のときの極限値を求めることで, 式(c)から式(f)が導くことができる.

以上の関係を図式化したものが図-2である.

参考文献; 1). 島田静雄: 土木応用数学, 共立出版

2). 渡辺, 三浦, 宮本: 弾性床上の柱の剛性マトリックス解析法について, 第29回講演要集

3). 渡辺, 佐藤: 単純橋の剛性マトリックスによる解析法, 第30回講演要集

4). 渡辺, 宮本, 安彦: 弾性床上の棒の座屈の剛性マトリックス解析法について, 第30回講演要集

集 5). Hetényi, M.: Beams on Elastic Foundations, Univ. of Michigan Press