(1) ラプラス変換による弾性床上桁の剛性マトリックス解析

岩手大学工学部 正 員 宮本 裕
同 学生員○小嶋俊徳

1. まえがき

本研究は、弾性床上の桁の等価節点力を含む剛性マトリックス式を微分方程式に基ずいて、ラプラス変換を用い誘導したものである。

2. 微分方程式の解法

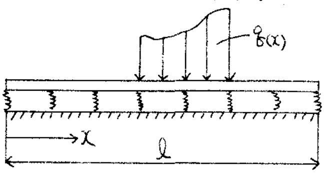

図-1

弾性床上の桁の微分方程式は次のように表わされる。(図-1)

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+ky=g(x)$$

ここでkは、基礎係数である。

(i)、集中荷重の場合 (図-2)

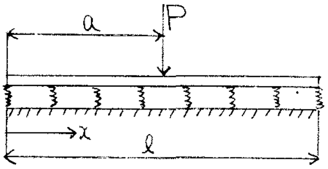

図-2

微分方程式は、δ関数を用い次のように表わされる。

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+ky=P\delta(x-a) \quad \cdots\cdots(1)$$

式(1)は、

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4\beta^4y=\alpha 1\,\delta(x-a) \quad \cdots\cdots(2)$$

となる。 但し、$\alpha 1=\frac{P}{EI}$, $\beta=\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$ である。

式(2)にラプラス変換を施し整理すると次のようになる。

$$Y(s)=\frac{s^3}{s^4+4\beta^4}y(0)+\frac{s^2}{s^4+4\beta^4}y'(0)-\frac{s}{s^4+4\beta^4}\cdot\frac{M(0)}{EI}-\frac{1}{s^4+4\beta^4}\cdot\frac{Q(0)}{EI}+\frac{\alpha 1\cdot e^{-sa}}{s^4+4\beta^4} \quad \cdots\cdots(3)$$

式(3)にステップ関数Uを用いてラプラス逆変換を施すと式(1)の解が求まる。

$$\begin{aligned}y(x)=&\mathrm{Ch}\beta x\cdot\cos\beta x\cdot y(0)+\frac{1}{2\beta}(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\cos\beta x+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\sin\beta x)y'(0)-\frac{1}{2\beta^2}\mathrm{Sh}\beta x\cdot\sin\beta x\frac{M(0)}{EI}+\frac{1}{4\beta^3}(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\cos\beta x-\mathrm{Ch}\beta x\cdot\sin\beta x)\cdot\frac{Q(0)}{EI}\\&+\frac{\alpha 1}{4\beta^3}\{\mathrm{Ch}\beta(x-a)\sin\beta(x-a)-\mathrm{Sh}\beta(x-a)\cdot\cos\beta(x-a)\}U(x-a)\end{aligned} \quad \cdots\cdots(4)$$

ここで$x>a$，即ち$U(x-a)=1$の時には

$$\begin{aligned}y'(x)=&\beta(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\cos\beta x-\mathrm{Ch}\beta x\cdot\sin\beta x)\cdot y(0)+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\cos\beta x\cdot y'(0)-\frac{1}{2\beta}(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\cos\beta x+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\sin\beta x)\frac{M(0)}{EI}-\frac{1}{2\beta^2}\mathrm{Sh}\beta x\cdot\sin\beta x\cdot\frac{Q(0)}{EI}\\&+\frac{\alpha 1}{2\beta^2}\mathrm{Sh}\beta(x-a)\sin\beta(x-a)\end{aligned} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\begin{aligned}\frac{M(x)}{EI}=-y''(x)=&2\beta^2\mathrm{Sh}\beta x\cdot\sin\beta x\cdot y(0)-\beta(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\cos\beta x-\mathrm{Ch}\beta x\cdot\sin\beta x)y'(0)+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\cos\beta x\cdot\frac{M(0)}{EI}+\frac{1}{2\beta}(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\cos\beta x+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\sin\beta x)\cdot\frac{Q(0)}{EI}\\&-\frac{\alpha 1}{2\beta}\{\mathrm{Sh}\beta(x-a)\cdot\cos\beta(x-a)+\mathrm{Ch}\beta(x-a)\sin\beta(x-a)\}\end{aligned} \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\begin{aligned}\frac{Q(x)}{EI}=-y'''(x)=&2\beta^3(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\cos\beta x+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\sin\beta x)\cdot y(0)+2\beta^2\mathrm{Sh}\beta x\cdot\sin\beta x\cdot y'(0)+\beta(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\cos\beta x-\mathrm{Ch}\beta x\cdot\sin\beta x)\frac{M(0)}{EI}+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\cos\beta x\cdot\frac{Q(0)}{EI}\\&-\alpha 1\cdot\mathrm{Ch}\beta(x-a)\cdot\cos\beta(x-a)\end{aligned} \quad \cdots\cdots(7)$$

(ii)、等分布荷重の場合 (図-3)

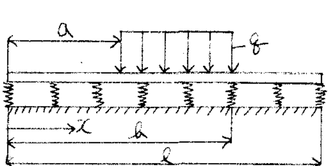

図-3

微分方程式は、ステップ関数Uを用い次のように表わされる。

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4\beta^4y=\alpha 2\{U(x-a)-U(x-b)\} \quad \cdots\cdots(8)$$

但し、$\alpha 2=\frac{g}{EI}$, $\beta=\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$ である。

(i)と同様の計算をすると式(8)の解が得られる。

$$\begin{aligned}y(x)=&\mathrm{Ch}\beta x\cdot\cos\beta x\cdot y(0)+\frac{1}{2\beta}(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\cos\beta x+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\sin\beta x)y'(0)-\frac{1}{2\beta^2}\mathrm{Sh}\beta x\cdot\sin\beta x\cdot\frac{M(0)}{EI}+\frac{1}{4\beta^3}(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\cos\beta x-\mathrm{Ch}\beta x\cdot\sin\beta x)\frac{Q(0)}{EI}\\&+\frac{\alpha 2}{4\beta^4}\{\mathrm{Ch}\beta(x-b)\cdot\cos\beta(x-b)\cdot U(x-b)-\mathrm{Ch}\beta(x-a)\cdot\cos\beta(x-a)U(x-a)\}\end{aligned} \quad \cdots\cdots(9)$$

$x>b$の時には$U(x-a)=1$, $U(x-b)=1$であるから

$$\begin{aligned}y(x)=&\beta(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\cos\beta x-\mathrm{Ch}\beta x\cdot\sin\beta x)y(0)+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\cos\beta x\cdot y(0)-\frac{1}{2\beta}(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\cos\beta x+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\sin\beta x)\frac{M(0)}{EI}-\frac{1}{2\beta^2}\mathrm{Sh}\beta x\cdot\sin\beta x\cdot\frac{Q(0)}{EI}\\&+\frac{\alpha 2}{4\beta^3}\{\mathrm{Sh}\beta(x-b)\cdot\cos\beta(x-b)-\mathrm{Ch}\beta(x-b)\sin\beta(x-b)-\mathrm{Sh}\beta(x-a)\cos\beta(x-a)+\mathrm{Ch}\beta(x-a)\sin\beta(x-a)\}\end{aligned} \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\frac{M(x)}{EI}=-y''(x)=2\beta^2\,\mathrm{Sh}\beta x\cdot\mathrm{Sin}\beta x\cdot y(0)-\beta(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\mathrm{Cos}\beta x-\mathrm{Ch}\beta x\cdot\mathrm{Sin}\beta x)\,y'(0)+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\mathrm{Cos}\beta x\,\frac{M(0)}{EI}+\frac{1}{2\beta}(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\mathrm{Cos}\beta x+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\mathrm{Sin}\beta x)\frac{Q(0)}{EI}$$
$$+\frac{\alpha 2}{2\beta^2}\{\mathrm{Sh}\beta(x-b)\cdot\mathrm{Sin}\beta(x-b)-\mathrm{Sh}\beta(x-a)\cdot\mathrm{Sin}\beta(x-a)\}\quad\cdots\cdots(11)$$

$$\frac{Q(x)}{EI}=-y'''(x)=2\beta^3(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\mathrm{Cos}\beta x+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\mathrm{Sin}\beta x)\,y(0)+2\beta^2\,\mathrm{Sh}\beta x\cdot\mathrm{Sin}\beta x\cdot y'(0)+\beta(\mathrm{Sh}\beta x\cdot\mathrm{Cos}\beta x-\mathrm{Ch}\beta x\cdot\mathrm{Sin}\beta x)\frac{M(0)}{EI}+\mathrm{Ch}\beta x\cdot\mathrm{Cos}\beta x\,\frac{Q(0)}{EI}$$
$$+\frac{\alpha 2}{2\beta}\{\mathrm{Sh}\beta(x-b)\cdot\mathrm{Cos}\beta(x-b)+\mathrm{Ch}\beta(x-b)\cdot\mathrm{Sin}\beta(x-b)-\mathrm{Sh}\beta(x-a)\cdot\mathrm{Cos}\beta(x-a)-\mathrm{Ch}\beta(x-a)\cdot\mathrm{Sin}\beta(x-a)\}\quad\cdots\cdots(12)$$

3. マトリックス変換

式(4),(5),(6),(7)及び(9),(10),(11),(12)は $x=l$ とおくと次のように表わされる.

$$\begin{Bmatrix} y(l)\\ y'(l)\\ \frac{M(l)}{EI}\\ \frac{Q(l)}{EI}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\ a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y(0)\\ y'(0)\\ \frac{M(0)}{EI}\\ \frac{Q(0)}{EI}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} C_4\\ C_3\\ C_2\\ C_1\end{Bmatrix}\quad\cdots(13)$$

ここで $\delta=\begin{Bmatrix} y\\ y'\end{Bmatrix}$, $X=\begin{Bmatrix}\frac{M}{EI}\\ \frac{Q}{EI}\end{Bmatrix}$, $A_2=\begin{Bmatrix} C_4\\ C_3\end{Bmatrix}$, $A_1=\begin{Bmatrix} C_2\\ C_1\end{Bmatrix}$

とすると式(13)は次のようになる.

$$\begin{Bmatrix}\delta(l)\\ X(l)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{11}&k_{12}\\ k_{21}&k_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta(0)\\ X(0)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} A_2\\ A_1\end{Bmatrix}\quad\cdots(14)$$

$$\left.\begin{aligned}\delta(l)&=k_{11}\delta(0)+k_{12}X(0)+A_2\\ X(l)&=k_{21}\delta(0)+k_{22}X(0)+A_1\end{aligned}\right\}\text{これより}\qquad\begin{aligned}&k_{12}^{-1}\{\delta(l)-k_{11}\delta(0)-A_2\}=X(0)\\ &X(l)=k_{21}\delta(0)+k_{22}k_{12}^{-1}\{\delta(l)-k_{11}\delta(0)-A_2\}+A_1\end{aligned}$$

$$\therefore\ X(0)=-k_{12}^{-1}k_{11}\delta(0)+k_{12}^{-1}\delta(l)-k_{12}^{-1}A_2$$
$$X(l)=(k_{21}-k_{22}k_{12}^{-1}k_{11})\delta(0)+k_{22}k_{12}^{-1}\delta(l)-(k_{22}k_{12}^{-1}A_2-A_1)$$

$$\begin{Bmatrix} X(0)\\ X(l)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_{12}^{-1}k_{11}&k_{12}^{-1}\\ k_{21}-k_{22}k_{12}^{-1}k_{11}&k_{22}k_{12}^{-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta(0)\\ \delta(l)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-k_{12}^{-1}A_2\\ -(k_{22}k_{12}^{-1}A_2-A_1)\end{Bmatrix}\quad\cdots\cdots(15)$$

4. 剛性マトリックスの誘導

式(15)の各要素について計算すると次のようになる. 但しここでは, M, Q, y, y', P及び g の符号の定義を図-4のように直した. またQ, Mの順序に改めた. $\alpha 1=\frac{P}{EI}$, $\alpha 2=\frac{g}{EI}$, $\beta=\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$

$$\begin{Bmatrix}\frac{Q(0)}{EI}\\ \frac{M(0)}{EI}\\ \frac{Q(l)}{EI}\\ \frac{M(l)}{EI}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\mathrm{Sh}^2\beta l-\mathrm{Sin}^2\beta l}\begin{bmatrix}4\beta^3(\mathrm{Sh}\beta l\cdot\mathrm{Ch}\beta l+\mathrm{Sin}\beta l\cdot\mathrm{Cos}\beta l) & -2\beta^2(\mathrm{Sh}^2\beta l+\mathrm{Sin}^2\beta l) & -4\beta^3(\mathrm{Sh}\beta l\cdot\mathrm{Cos}\beta l+\mathrm{Ch}\beta l\cdot\mathrm{Sin}\beta l) & -4\beta^2\,\mathrm{Sh}\beta l\cdot\mathrm{Sin}\beta l\\ & 2\beta(\mathrm{Sh}\beta l\cdot\mathrm{Ch}\beta l-\mathrm{Sin}\beta l\cdot\mathrm{Cos}\beta l) & 4\beta^2\,\mathrm{Sh}\beta l\cdot\mathrm{Sin}\beta l & -2\beta(\mathrm{Sh}\beta l\cdot\mathrm{Cos}\beta l-\mathrm{Ch}\beta l\cdot\mathrm{Sin}\beta l)\\ & & 4\beta^3(\mathrm{Sh}\beta l\cdot\mathrm{Ch}\beta l+\mathrm{Sin}\beta l\cdot\mathrm{Cos}\beta l) & 2\beta^2(\mathrm{Sh}^2\beta l+\mathrm{Sin}^2\beta l)\\ \mathrm{Sym.} & & & 2\beta(\mathrm{Sh}\beta l\cdot\mathrm{Ch}\beta l-\mathrm{Sin}\beta l\cdot\mathrm{Cos}\beta l)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y(0)\\ y'(0)\\ y(l)\\ y'(l)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} H1\\ G1\\ H2\\ G2\end{Bmatrix}$$

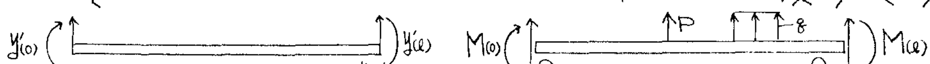

図-4

	H1	G1	H2	G2
集中荷重	$\frac{-\alpha 1}{\mathrm{Sh}^2\beta l-\mathrm{Sin}^2\beta l}[\{\mathrm{Sh}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Cos}\beta a+\mathrm{Ch}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Sin}\beta a\}\mathrm{Sh}\beta l-\{\mathrm{Sin}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Ch}\beta a+\mathrm{Cos}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Sh}\beta a\}\mathrm{Sin}\beta l]$	$\frac{\alpha 1}{\beta(\mathrm{Sh}^2\beta l-\mathrm{Sin}^2\beta l)}\{\mathrm{Sh}\beta l\cdot\mathrm{Sin}\beta a\cdot\mathrm{Sh}\beta(l-a)-\mathrm{Sin}\beta l\cdot\mathrm{Sh}\beta a\cdot\mathrm{Sin}\beta(l-a)\}$	$\frac{-\alpha 1}{\mathrm{Sh}^2\beta l-\mathrm{Sin}^2\beta l}[\{\mathrm{Sh}\beta a\cdot\mathrm{Cos}\beta(l-a)+\mathrm{Ch}\beta a\cdot\mathrm{Sin}\beta(l-a)\}\mathrm{Sh}\beta l-\{\mathrm{Sin}\beta a\cdot\mathrm{Ch}\beta(l-a)+\mathrm{Cos}\beta a\cdot\mathrm{Sh}\beta(l-a)\}\mathrm{Sin}\beta l]$	$\frac{-\alpha 1}{\beta(\mathrm{Sh}^2\beta l-\mathrm{Sin}^2\beta l)}\{\mathrm{Sh}\beta l\cdot\mathrm{Sin}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Sh}\beta a-\mathrm{Sin}\beta l\cdot\mathrm{Sh}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Sin}\beta a\}$
等分布荷重	$\frac{-\alpha 2}{\beta(\mathrm{Sh}^2\beta l-\mathrm{Sin}^2\beta l)}[\{\mathrm{Ch}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Cos}\beta a-\mathrm{Ch}\beta(l-b)\cdot\mathrm{Cos}\beta b\}\mathrm{Sh}\beta l+\{\mathrm{Cos}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Ch}\beta a-\mathrm{Cos}\beta(l-b)\cdot\mathrm{Ch}\beta b\}\mathrm{Sin}\beta l]$	$\frac{\alpha 2}{2\beta(\mathrm{Sh}^2\beta l-\mathrm{Sin}^2\beta l)}[\{\mathrm{Ch}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Sin}\beta a-\mathrm{Ch}\beta(l-b)\cdot\mathrm{Sin}\beta b+\mathrm{Sh}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Cos}\beta a-\mathrm{Sh}\beta(l-b)\cdot\mathrm{Cos}\beta b\}\mathrm{Sh}\beta l+\{\mathrm{Cos}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Sh}\beta a-\mathrm{Cos}\beta(l-b)\cdot\mathrm{Sh}\beta b+\mathrm{Sin}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Ch}\beta a-\mathrm{Sin}\beta(l-b)\cdot\mathrm{Ch}\beta b\}\mathrm{Sin}\beta l]$	$\frac{-\alpha 2}{\beta(\mathrm{Sh}^2\beta l-\mathrm{Sin}^2\beta l)}[\{\mathrm{Cos}\beta(l-b)\cdot\mathrm{Ch}\beta b-\mathrm{Cos}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Ch}\beta a\}\mathrm{Sh}\beta l+\{\mathrm{Ch}\beta(l-b)\cdot\mathrm{Cos}\beta b-\mathrm{Ch}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Cos}\beta a\}\mathrm{Sin}\beta l]$	$\frac{-\alpha 2}{2\beta(\mathrm{Sh}^2\beta l-\mathrm{Sin}^2\beta l)}[\{\mathrm{Cos}\beta(l-b)\cdot\mathrm{Sh}\beta b-\mathrm{Cos}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Sh}\beta a+\mathrm{Sin}\beta(l-b)\cdot\mathrm{Ch}\beta b-\mathrm{Sin}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Ch}\beta a\}\mathrm{Sh}\beta l+\{\mathrm{Ch}\beta(l-b)\cdot\mathrm{Sin}\beta b-\mathrm{Ch}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Sin}\beta a+\mathrm{Sh}\beta(l-b)\cdot\mathrm{Cos}\beta b-\mathrm{Sh}\beta(l-a)\cdot\mathrm{Cos}\beta a\}\mathrm{Sin}\beta l]$