# 長波のショアリング

東北大学大学院　学生員　○真野　明
東北大学工学部　正　員　岩崎　敏夫

1．はじめに　長波の斜面上の変形については、数多くの理論的・実験的研究があるが、線型分散のとりあつかいをしたものは、波高の変化は水深の変化の $-1/4$ 乗に比例するという有名なGreenの公式がある。一方長波は斜面上を進行遡上するとともに、その水深が浅くなるために、初期の状態で線型であっても汀線の近くでは、非線型性が増大する。この非線型性を考慮した解析には、岸やMéhauté の研究があり、いずれも特性曲線の手法を用いて、前者は解析的に、後者は数値計算により解いているが、この非線型理論の分散の効果としては、振幅分散の影響のみが含まれており、波の位相速度は、その局所的波高の平方根に比例して、波は進行とともにその形をかえ、前面が急に後面が滑らかになって、ついには前面が砕波にいたることがわかっている。このことは、どのように小さな初期波形であっても砕波するということになるので、物理的には少し問題がある。これに対して、波面曲率の変化をあらわす高次の微分項により、周波数分散の影響をとり入れた波動方程式が、Boussinesq 方程式であるが、この方程式を線型長波の波速で運動している座標系にGalileo 変換した場合に、Boussinesq 方程式の波高 $\eta$、流速 $u$ が適当な無次元化のもとで等しくなり、1従属変数のK-dV 方程式になる。

$$\eta_t - 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0 \qquad (1)$$

(1) 式のもつ漸近的な性質については、解析的に知られており、適当な初期波形をもった波は、十分な時間が経過した後、数個の孤立波群（ソリトン）と振動性のさざ波に分裂する。このソリトンの個数と、その漸近的な振幅は (1) 式を次のSchrödinger 方程式

$$\psi_{xx} + [\lambda + \eta(x,0)]\psi = 0 \qquad (2)$$

の固有値問題として解くことにより求められ、それらの固有値を $\lambda_n$ とすると、ソリトンの数は $\lambda_n$ のうち、非正の実固有値の数に一致し、その漸近的な振幅は、$2\lambda_n$ で与えられることがわかっている。この漸近的性質によると、一様水深を進行する長波に対しては、最大で初期波形の最大値 $\eta_{max}(x,0)$ の2倍まで増幅する。斜面上の孤立波の波高の変化に関しては、$-1/4$ 乗則・$-1$ 乗則があるが、一般的な初期波形に対しては、今述べたソリトン分裂の影響でこれらの冪乗則とは異なった波高の出現することが推測される。今回の報告では、このK-dV 方程式の元方程式であるBoussinesq 方程式をとりあげ、Mei－Méhauté の導いた水深の変化する場合に対応する方程式により数値計算を行なったものである。

2．数値計算　数値計算は次に示す4本の特性曲線上における4個の常微分方程式を差分化し、それを連立させて解いた。

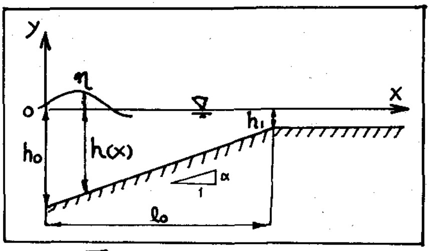
$dx/dt = 0$，0上で　$d\eta/dt \equiv v$，$dv/dt \equiv a$ 　(3)

$dx/dt = \pm C_0(x) = \sqrt{(3h/\epsilon)(1-h'^2+hh'')/(1-hh''/2)}$ 上で

$$\begin{aligned}
&(Ch/6 + uh/2)\cdot d\eta/d\beta + (5h^2h'/12)\cdot dv/d\beta \\
&+ (1-hh''/2)\cdot(\epsilon hC^2/6)du/d\beta + (\epsilon Ch^2/12)\,da/d\beta \\
&= (ChD/2 + (\epsilon h^2 c^2/6)u)u + (hh'/6)\cdot(5h/2 - \epsilon C^2)a \\
&+ (\eta C/2 - hC/3 + (h/2 + \epsilon C^2/6)u)u
\end{aligned} \qquad (4)$$

ここで　$D = (h'/h)\eta - h' + (h')^3 + h^2h''/3 + 2hh'h''$　，$\epsilon = h_0$ 　(5)

$$C = \begin{pmatrix} C_0(x) \\ -C_0(x) \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(t \mp \int \frac{dx}{C_0(x)}\right) = const. \qquad (6)$$



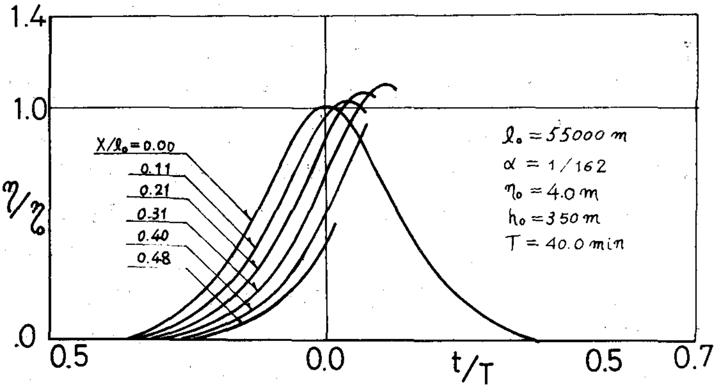
図−1

(4) 式は左辺と右辺に、変数 $\eta$、$u$ 等が含まれており、逐次計算法により新しく計算した値を右辺に代入して、

左辺の変数を求めていく方法をとった。前回の報告では，差分法の精度をあげるために多段法を使ったが，数値実験の結果，1段法とあまり差がないので，計算容量をへらすために，1段法にきりかえた。

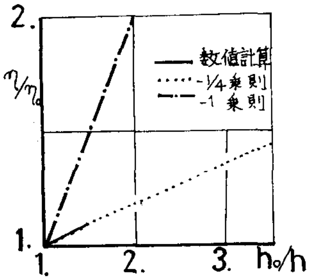
入力波形は，岩崎・楊が十勝沖地震モデルに対して行なった数値計算により得られた，水深350m での津波波形の一つをとりあげ，これに近い解析関数をあてはめ，$\eta(0,t)=\eta_0\,\mathrm{sech}^2\omega t$ という，図－2の$x/l_0=0.00$ に示す時間波形を沖側境界条件として与えた。図－2では，$\eta_0=4.0$ m，$\omega=0.00258\ \mathrm{sec}^{-1}$ である。Munk の孤立波理論によると，$\omega=\{(3\eta_0/4h_0^3)\cdot g\cdot(h_0+\eta_0)\}^{1/2}=0.0755\ \mathrm{sec}^{-1}$ であるので，ここで与えた $\eta(0,t)$ は正しい孤立波ではない。沖側境界の $\eta(0,t)$ に対する流速uは，この境界上での負の特性曲線により計算される値をとったが，この値は $\eta(0,t)$ を進行波成分とした場合に得られる線型長波の流速にほぼ等しかった。また波先端での境界条件としては，先導特性曲線 $dx/dt=C_0(x)$ 上で，$\eta, v, u, u=0$ とした。斜面の勾配 $\alpha=1/162$，浅瀬部分の水深は $h_1=h_0/35$ である。

3．計算結果および考察　図－2に各地点での時間波形を示す。横軸に経過時間を周期Tで無次元化したものを，縦軸には各時刻における波高を初期波高の最大値 $\eta_0$ で無次元化したものをとった。地点は $x/l_0=0.00\sim0.48$ であり，$l_0$ は斜面部分の水平距離である。この範囲での波の諸元は，$0.011<\eta/h<0.018$，$\eta_0/L_0=0.282\times10^{-4}$ である。（$L_0$ は線型長波の波長）。ここではピークの増加は見られるが，波形自体の顕著な変化は見られない。この波高の変化を水深の変化に対してプロットしたのが図－3である。横軸は距離xでの水深hに対する $h_0$ の比である。実線が数値計算による結果であるが，これは前に述べた－1/4乗則を示す点線によく一致しており，波の諸元から考えても線型理論により十分予想されることがわかる。入射波が正しい孤立波の場合については，周波数分散の効果が十分大きくなるような，水深の浅い領域に対して，首藤により（－1）乗則の解析解が求められている。また佐伯らは，その（－1）乗則と，線型理論の（－1/4）乗則の境界，および砕波限界について，実験的に求めている。それらはいずれも波高水深比および底勾配に依存する。




図－2

それらを今回のモデルで比べてみると $(h_0/h_A)=(\eta_0/h_0)^{-4/5}(\eta_A/h_A)^{4/5}=9.9$　$(h_0/h_B)=(\eta_B/h_B)^{1/2}(\eta_A/h_A)^{3/10}(\eta_0/h_0)^{-4/5}=21.0$ となる。ここで添字A，Bは各々（－1/4）乗則と（－1）乗則の境界地点，および砕波地点をあらわす。これらの数値より，今回行なった数値計算では計算の範囲が不足しており，今後さらに浅い部分について計算を進め，これら孤立波の結果との比較および波の変形を調べる必要がある。




図－3

参考文献


(1) 岸力・花井正次，津波の変形と陸上への打上げ高，第8回海岸工学講演会講演集，1961

(2) Freeman・Méhauté, Wave Breakers on a Beach and Surges on a Dry Bed, ASCE, 1964

(3) Zabusky, Solitons and Bound States of the Time-independent Schrödinger Equations, Phy. Rev. 1968

(4) 岩崎敏夫・佐藤道郎・真野明，長波のショアリングに関する研究，昭48年東北支部技術研究発表会概要，1973

(5) 岩崎敏夫・楊沢民，波源域と三陸沿岸における津波の変形との関係について，第10回災害科学シンポジウム，1972

(6) 首藤伸夫，非線型長波の変形，第21回海岸工学講演会論文集，1974