

1 まえがき 有限要素法は対象とする連続体を有限個の小領域に分割し、各々の小領域ごとに表現した属性を全領域にわたって組み立てることによってその連続体の属性を解析する手法であり、有用な構造解析法として広く知られている。しかしながら有限要素法のこのような概念は単に構造物のみならず、流体問題、質量輸送問題、電磁場の問題など広い範囲にわたって応用が可能である。本報では有限要素法の適用範囲を拡張すべく、長波に対する一連の方程式、すなわち微小振幅長波方程式、有限振幅長波方程式、及び Boussinesq 方程式について有限要素法による解析を試みたものである。

2 基礎方程式 長波を表現する微小振幅、有限振幅、Boussinesq の各方程式は無次元化した次の式を使用する。

$$\left. \begin{aligned} \text{微小振幅} \quad \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{有限振幅} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \tilde{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -(1+\tilde{\eta}) \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Boussinesq} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \tilde{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -(1+\tilde{\eta}) \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \right\} (3)$$

ただし $u = u^* / \sqrt{gh_0}$, $\eta = \eta^* / h_0$, $t = t^* \sqrt{g/h_0}$, $x = x^* / h_0$ で u は流速, η は波高, t は時間, x は水平方向の座標, $*$ は次元量を表わす。 h_0 は鉛直方向の代表的スケールである。非線型項の $\tilde{u}$, $\tilde{\eta}$ は前時間ステップにおいて求めた u , η の値であって実際の計算では $\tilde{u}$, $\tilde{\eta}$ を初期値とも同ステップ内で反復計算を行う。

3 有限要素近似 u , η をそれぞれ

$$\hat{u}^e(x, t) = \sum N^i(x) u^i(t), \quad (4)$$

$$\hat{\eta}^e(x, t) = \sum N^i(x) \eta^i(t) \quad (5)$$

と近似する。 $\hat{u}^e$, $\hat{\eta}^e$ は要素内の u , η 、また u^i , η^i は節点上での値である。 N^i は形状関数でこの場合一次要素に対応して、

$$N^i = \begin{bmatrix} L_1^2 - L_1 L_2 & L_2^2 - L_1 L_2 & 4 L_1 L_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

の形となる。ここに L_1 , L_2 は線座標で $L_1 = (x_b - x) / l$, $L_2 = (x - x_a) / l$ となる。 l は要素長, x_a, x_b は要素の左端及び右端の x 座標である。(4), (5) を基礎方程式に代入して Galerkin 法により定式化する。

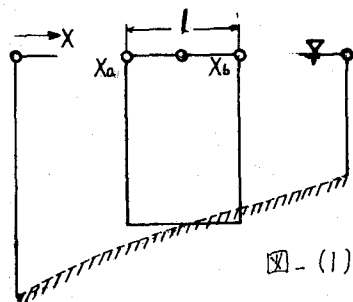


図 - (1)

4 計算結果及び考察 微小振幅長波方程式と有限振幅長波方程式について初期波形として正弦波を与えて計算した結果を、また Boussinesq 方程式については孤立波を与えた計算結果を示す。計算は $t=0$ で初期波形の波高と流速を出発値とし、各時間ステップごとに解を求めていく。要素長 l と時間間隔 Δt の大きさは $l^2/\Delta t = 1$ となるように分割した。図-(2)は微小振幅長波方程式による正弦波の計算であり与えた初期波形の最大振幅 η_0 は $\eta_0 = 0.1 h_0$ 、波長 λ は $\lambda = 20 h_0$ である。分割の大きさは $l = \lambda / 20$ にとった。伝播する波形は変化しない正弦波であり理論と一致している。同じ諸元の正弦波を有限振幅長波方程式で計算した結果が図-(3)である。分割の大きさは微小振幅長波と同様に $l = \lambda / 20$ としてある。有限振幅長波は非線型項の影響で波高の高い部分の波速が波高の低い部分の波速よりも早いため伝播に伴って波形は変化し次第に波頂前面が急勾配

になり波の後面は緩勾配になる性質を持つが図-(3)に見られる波形変化の傾向はそのような有限振幅長波の特徴を十分に表わしている。図-(3)は一樣水深に対する計算であるが、次に水深の変化する場合について計算を行った結果を図-(4)に示す。与えた初期波形の正弦波は一樣水深のときと同じもので、式も有限振幅長波方程式である。傾斜面は原点から $x=10h_0$ の地点より始まり勾配 $1:20$ で続く。時間ステップは比較のため波が傾斜面上へ半波長だけ進んだ時刻を $t=0$ としてある。表われた波形変化は一樣水深よりも顕著であり、傾斜面上の伝播距離が進むにつれて波の山は高く、また波の谷は浅くなっていく。さらに傾斜面上の水深が小さくなるにつれて波速も遅くなるので波の先端の進行が妨がられ波長が短くなる様子も見られる。

これは有限振幅長波の計算はいずれも時間ステップを進める0.1に依って安定性が失われ、特に水深変化の場合には $t=8.0$ 以後急速に不安定となる。

図-(5)は初期波形に孤立波を用いた Boussinesq 方程式による計算結果で、与えた初期波形の最大振幅 η_0 は $\eta_0=0.1h_0$ 、分割は有効波長 λ_e に

つき $\lambda_e = \lambda_0/10$ である。孤立波は周波数分散効果と振幅分散効果とが常にバランスを保った状態で進行するために波形変化のない定常波としても知られている。計算によって表われた波形を見ると、図の太線が初期波形、細線が進行波形であるが波形変化は少ない波の前面がわずかに勾配をくずす程度であって得られた波形が定常解であることを裏付けている。

参考文献 Joseph Leonard Hammack, Jr. "Tsunami: A model of their generation and propagation", C.I.T.Rep. 1972
 D. Howell Peregrine, "Equations for Water Waves and the approximation behind them", Waves on Beaches, 1972
 J.T. Oden, "The Finite Element Method in fluid mechanics", A.S.C.E. 96, 1969
 近井藤一, 河合三四郎, "波動解析への有限要素法の適用", 第10回海岸工学講演会論文集, 1973

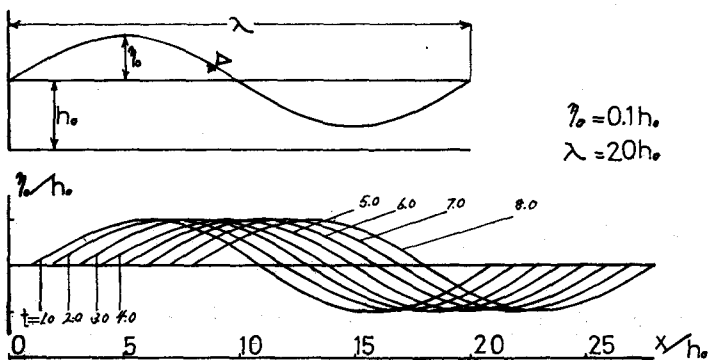


図-(2)

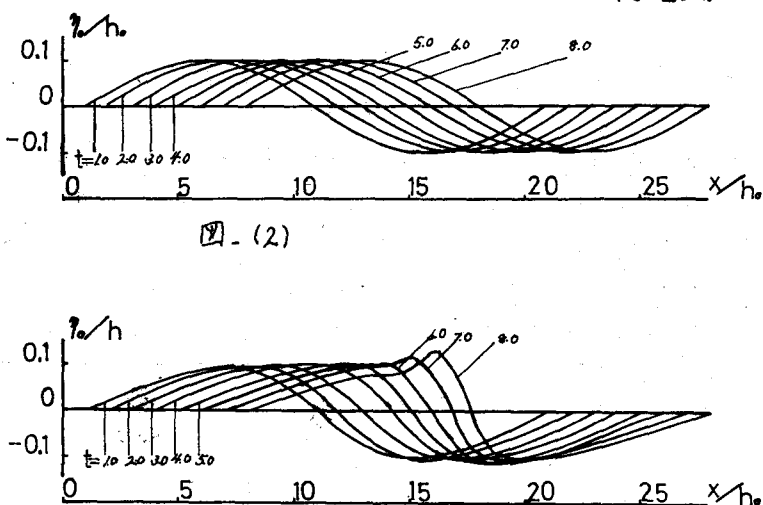


図-(3)

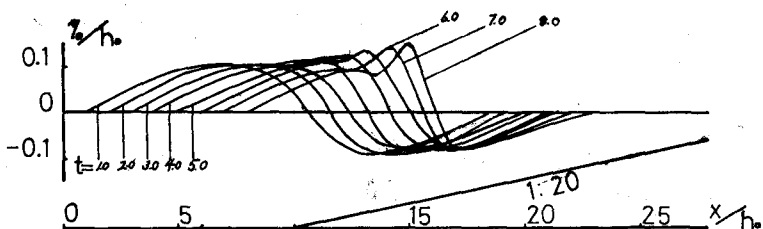


図-(4)

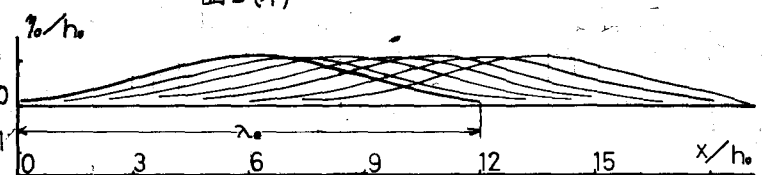


図-(5)