

弾性床上的ラーメンの構造特性

岩手大学工学部

正員

宮本 裕

学生員

○安彦 敏郎

学生員

伊藤 隆彦

1. すでに、弾性床上的の桁の剛性マトリックスを Anfang parameter法により誘導した。ここでは、分布荷重 $p(x)$ が作用するときの微分方程式の解を演算子を用いて求め、Anfang parameter法により剛性マトリックスを誘導した。この剛性マトリックスを用いて、変形法により、弾性床上的のラーメンの解析を行った。

2. 弾性床上的の桁の剛性マトリックスの誘導

図-1のような弾性床上的の桁に分布荷重 $p(x)$ が作用するときの微分方程式は

$$EI y'''' + ky = p(x) \quad \dots (1) \text{ となる}$$

$$\beta^4 = \frac{k}{4EI} \text{ とおくと } y'''' + 4\beta^4 y = \frac{p(x)}{EI} \quad \dots (2)$$

余関数は $y'''' + 4\beta^4 y = 0$ より

$$y(x) = C_1 \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_2 \cos \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_3 \sin \beta x \operatorname{ch} \beta x + C_4 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x$$

特解は微分演算子 D を用いて $(D^4 + 4\beta^4)y = \frac{1}{EI}p(x)$

$$\begin{aligned} \therefore y(x) &= \frac{1}{D^4 + 4\beta^4} \left(\frac{p(x)}{EI} \right) = -\frac{1+i}{16EI\beta^3} \frac{p(x)}{D-\beta^2 i} + \frac{1-i}{16EI\beta^3} \frac{p(x)}{D+\beta^2 i} + \frac{1+i}{16EI\beta^3} \frac{p(x)}{D+\beta^2 i} - \frac{1-i}{16EI\beta^3} \frac{p(x)}{D-\beta^2 i} \\ &= -\frac{1+i}{16EI\beta^3} e^{(\beta^2+i)x} \int p(x) e^{-(\beta^2+i)x} dx + \frac{1-i}{16EI\beta^3} e^{(\beta^2-i)x} \int p(x) e^{-(\beta^2-i)x} dx + \frac{1+i}{16EI\beta^3} e^{(\beta^2+i)x} \int p(x) e^{-(\beta^2+i)x} dx - \frac{1-i}{16EI\beta^3} e^{(\beta^2-i)x} \int p(x) e^{-(\beta^2-i)x} dx \end{aligned}$$

ここで $e^{\beta x} = \operatorname{ch} \beta x + \operatorname{sh} \beta x$, $e^{-\beta x} = \operatorname{ch} \beta x - \operatorname{sh} \beta x$, $e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$, $e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x$

$$\therefore y(x) = \int_0^x \{ \operatorname{ch} \beta(x-t) \sin \beta(x-t) - \operatorname{sh} \beta(x-t) \cos \beta(x-t) \} x \frac{p(t)}{4EI\beta^3} dt$$

$$(2) \text{ の解は } y(x) = C_1 \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_2 \cos \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_3 \sin \beta x \operatorname{ch} \beta x + C_4 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x + \int_0^x \{ \operatorname{ch} \beta(x-t) \sin \beta(x-t) - \operatorname{sh} \beta(x-t) \cos \beta(x-t) \} \frac{p(t)}{4EI\beta^3} dt \quad \dots (3)$$

$$y(x) = \beta \{ C_1 (\sin \beta x \operatorname{ch} \beta x + \cos \beta x \operatorname{sh} \beta x) + C_2 (\cos \beta x \operatorname{ch} \beta x - \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x) + C_3 (\sin \beta x \operatorname{sh} \beta x + \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x) + C_4 (\cos \beta x \operatorname{sh} \beta x - \sin \beta x \operatorname{ch} \beta x) \} + \int_0^x \{ \operatorname{sh} \beta(l-t) \sin \beta(l-t) \} \frac{p(t)}{2EI\beta^3} dt \quad \dots (4)$$

$$\frac{M(x)}{EI} = -y''(x) = -2\beta^2 \{ C_1 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x - C_2 \sin \beta x \operatorname{ch} \beta x + C_3 \cos \beta x \operatorname{sh} \beta x - C_4 \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x \} - \int_0^x \{ \operatorname{ch} \beta(l-t) \sin \beta(l-t) + \operatorname{sh} \beta(l-t) \cos \beta(l-t) \} \frac{p(t)}{2EI\beta} dt \quad \dots (5)$$

$$\frac{Q(x)}{EI} = -y'''(x) = -2\beta^3 \{ C_1 (\cos \beta x \operatorname{sh} \beta x - \sin \beta x \operatorname{ch} \beta x) - C_2 (\sin \beta x \operatorname{sh} \beta x + \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x) + C_3 (\cos \beta x \operatorname{ch} \beta x - \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x) - C_4 (\sin \beta x \operatorname{ch} \beta x + \cos \beta x \operatorname{sh} \beta x) \} - \int_0^x \{ \operatorname{ch} \beta(l-t) \cos \beta(l-t) \} \frac{p(t)}{EI} dt \quad \dots (6)$$

$$y(0), y'(0), M(0), Q(0) \text{ を考え } C_1 = -\frac{M(0)}{EI \cdot 2\beta^2}, C_2 = \frac{y'(0)}{2\beta} + \frac{Q(0)}{EI \cdot 4\beta^3}, C_3 = \frac{y(0)}{2\beta} - \frac{Q(0)}{EI \cdot 4\beta^3}, C_4 = y(0) \quad \dots (7)$$

(7) を (3), (4), (5), (6) に代入すると $y(x), y'(x), \frac{M(x)}{EI}, \frac{Q(x)}{EI}$ が求められる。これらの式に $x=l$ を代入すると (8) のようになる

$$\begin{pmatrix} y(l) \\ y'(l) \\ \frac{M(l)}{EI} \\ \frac{Q(l)}{EI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \frac{M(0)}{EI} \\ \frac{Q(0)}{EI} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_4 \\ E_3 \\ E_2 \\ E_1 \end{pmatrix} \quad \dots (8)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{Q(0)}{EI} \\ \frac{E_1}{EI} \\ \frac{M(0)}{EI} \\ \frac{Q(l)}{EI} \\ \frac{M(l)}{EI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_1 \\ G_1 \\ H_2 \\ G_2 \end{pmatrix} \quad \dots (9)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } E_4 &= \int_0^l \{ch/\beta(l-t)\sin\beta(l-t) - sh/\beta(l-t)\cos\beta(l-t)\} \frac{P(t)}{4EI\beta^3} dt \\ E_5 &= \int_0^l sh/\beta(l-t)\sin\beta(l-t) \frac{P(t)}{2EI\beta^3} dt \\ E_2 &= -\int_0^l \{ch/\beta(l-t)\sin\beta(l-t) + sh/\beta(l-t)\cos\beta(l-t)\} \frac{P(t)}{2EI\beta^3} dt \\ E_1 &= -\int_0^l ch/\beta(l-t)\cos\beta(l-t) \frac{P(t)}{EI} dt \end{aligned}$$

式(8)より $\frac{M(0)}{EI}$, $\frac{Q(0)}{EI}$ を求め、式(8)と式(9)のように変形する。 M, Q, y, y' の符号を図-2のように定義すると式(10)を得る。

$$\begin{bmatrix} \frac{Q(0)}{EI} \\ \frac{M(0)}{EI} \\ \frac{Q(l)}{EI} \\ \frac{M(l)}{EI} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} +4\beta^3(\sin\beta l \cos\beta l - sh/\beta l \cos\beta l) & -2\beta^2(sh/\beta l + \sin\beta l) & +4\beta^3(\sin\beta l \cos\beta l + \cos\beta l sh/\beta l) & -4\beta^3 \sin\beta l sh/\beta l \\ -2\beta^2(sh/\beta l + \sin\beta l) & +2\beta^2 sh/\beta l \cos\beta l & +4\beta^3 \sin\beta l sh/\beta l & -2\beta^2(\cos\beta l sh/\beta l - \sin\beta l ch/\beta l) \\ -4\beta^3 \sin\beta l \cos\beta l & +4\beta^3 \sin\beta l sh/\beta l & +4\beta^3(\cos\beta l \sin\beta l + 2\beta^2(sh/\beta l + \sin\beta l) + ch/\beta l \cos\beta l) & +2\beta^2(sh/\beta l \cos\beta l - \cos\beta l \sin\beta l) \\ -4\beta^3 \sin\beta l sh/\beta l & -2\beta^2(\cos\beta l sh/\beta l - \sin\beta l ch/\beta l) & +2\beta^2(sh/\beta l + \sin\beta l) + 2\beta^2 sh/\beta l \cos\beta l & -\cos\beta l \sin\beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y(l) \\ y'(l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ G_1 \\ H_2 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad \dots (10)$$

$$\text{ただし } \alpha = \frac{1}{sh^2\beta l - \sin^2\beta l}$$

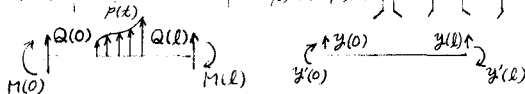


図-2

ここで G_1, G_2, H_1, H_2 は

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{+1}{(sh/\beta l - \sin\beta l)EI\beta^3} \int_0^l \{sh/\beta l \cos\beta(l-t)\sin\beta t - \sin\beta l \sin\beta(l-t)sh/\beta t\} P(t) dt \\ H_1 &= \frac{-1}{(sh/\beta l - \sin\beta l)EI\beta^3} \int_0^l \{sh/\beta l \{ch/\beta(l-t)\sin\beta t + sh/\beta(l-t)\cos\beta t\} - \sin\beta l \{\cos\beta(l-t)sh/\beta t + \sin\beta(l-t)ch/\beta t\}\} P(t) dt \\ G_2 &= \frac{-1}{(sh/\beta l - \sin\beta l)EI\beta^3} \int_0^l \{sh/\beta l \sin\beta(l-t)sh/\beta t - \sin\beta l sh/\beta(l-t)\sin\beta t\} P(t) dt \\ H_2 &= \frac{-1}{(sh/\beta l - \sin\beta l)EI\beta^3} \int_0^l \{sh/\beta l \{\sin\beta(l-t)ch/\beta t + \cos\beta(l-t)sh/\beta t\} - \sin\beta l \{sh/\beta(l-t)\cos\beta t + ch/\beta(l-t)\sin\beta t\}\} P(t) dt \end{aligned}$$

特に、荷重が等分布荷重の場合は $P(x) = q = \text{constant}$ において

$$G_1 = \frac{+q(sh/\beta l - \sin\beta l)}{2EI\beta^3(sh/\beta l + \sin\beta l)}$$

$$H_1 = \frac{-q(ch/\beta l - \cos\beta l)}{EI\beta^3(sh/\beta l + \sin\beta l)}$$

$$G_2 = \frac{-q(sh/\beta l - \sin\beta l)}{2EI\beta^3(sh/\beta l + \sin\beta l)}$$

$$H_2 = \frac{-q(ch/\beta l - \cos\beta l)}{EI\beta^3(sh/\beta l + \sin\beta l)}$$

ばねのない場合の剛性マトリックスも

同様に計算できるが、ここでは

$\lim_{\beta \rightarrow 0} H_1 = -\frac{1}{2}ql$ のように求めること

ができる。以上で、弾性床上の桁やラ

ーメンが計算できることがわかった。

図-3は、その計算の一例である。

終りに、本研究をすすめるに際し、北大工学部渡辺昇教授に非常にお世話になったことを感謝する。

なお、計算は、北大、東北大、東大の大型計算機センターを利用した。

参考文献 弾性床上の桁の剛性マトリックス解析法について；渡辺，三浦，宮本，第29回講演概要集

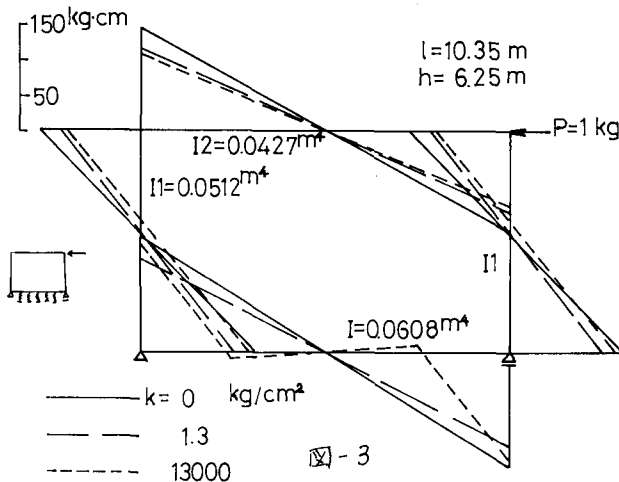


図-3