

連続曲線析における曲率面内変位の影響について

秋田大学 鉱山学部 土木工学科 正員

縁農 知徳

正員

薄木 征三

学生員

山岸 一彦

1. まえがき 曲線析の基礎弾性方程式を任意の座標軸に因に求めると、曲率面内変位と曲率面外変位が連成して、4元連立微分方程式として得られることはすでに知られている。そして一般に橋梁に用いられる曲り梁、すなわち、曲線析は曲率面外荷重のみを作用外力と考え、曲率面外と曲率面内とに關する弾性方程式に分離して曲率面外変位に關する2元連立微分方程式を求めて解析されている。この時、その曲線析の断面諸量の値が曲率面内における変位と曲率面外への変位との連成を左右している。例えは、任意軸に關する変位と表わした弾性方程式で、曲線析の断面が曲率面に平行な軸に因に対称な場合には連成する項に對する断面諸量 (Z_y, I_{zy}, C_z) はすべて零となり完全に分離独立する。これ以外の場合には中立軸および断面中の軸曲に關する変位と表わしたと、さらに断面主軸を用いても連成項の断面諸量はすべて零とはならない。即ち曲率面内における変位と曲率面外への変位との連成が残ることになる。一般に橋梁に用いられる曲線析の断面では曲率面に平行な軸曲に因に對称な場合とは上下フランジが等しいI形断面と上下フランジ板厚が等しく上下フランジ張出し部のない箱断面に限られる。それ故に従来多くの曲線析は曲率面内変位の影響を無視して設計していたわけである。そこで、この理論的には厳密性を欠く曲率面内変位を無視した弾性方程式が実用上いかなる精度をもっているかの考察のことにしてこの目的のためには著者らが誘導した薄肉断面曲線析の剛性マトリクス¹⁾を用いると曲率面内変位と曲率面外変位との連成について明確に説明され、故に曲率面内変位の影響を考慮に曲線析の解析が容易に計算されることになる。

2. 薄肉断面曲線析の剛性マトリクス 図-1(a)に示すような曲線析要素 $i-j$ に対して円柱座標系 ($O'-r, \theta, z$) と右手系直角座標系 ($i-x, y, z$) を用いる。軸線 $i-j$ は断面の任意の点を通る直線である。節点力と節点変位は図-1(b)に示す。任意軸に關する変位量とカ・モメント (曲げねじれモメントを含む) となっている。軸線 $i-j$ の変位 u, v, w および ϕ を3次のべき関数で近似して、仮想仕事の原理を用いると、有限要素法と類似した表示で次の方程式が得られる。

$$\{P\} = \int_V [B]^T [D] [B] dV \cdot \{\delta\} = [K] \{\delta\} \quad (1)$$

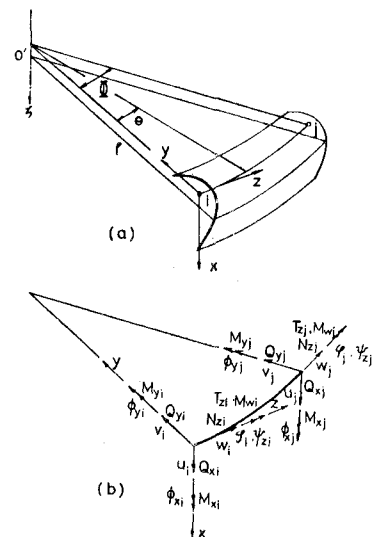
$$[K] = \int_0^{\pi} \int_R [B]^T [D] [B] t ds \rho d\theta \quad (2)$$

ここで、 $[B]$ は 2×14 マトリクスで各要素は x, y, θ の関数である。 $[D]$ は $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$ で部材の弾性係数マトリクスである。 $\{P\}$ および $\{\delta\}$ は節点力および節点変位ベクトルで式(3)に示される。

$$\left. \begin{aligned} \{P\} &= [Q_{xi} \ Q_{yi} \ N_{xi} \ M_{xi} \ My_i \ T_{xi} \ M_{xi} \ Q_{xj} \ Q_{yj} \ N_{xj} \ M_{xj} \ My_j \ T_{xj} \ M_{xj}]^T \\ \{\delta\} &= [u_{xi} \ v_{xi} \ w_{xi} \ \phi_{xi} \ \phi_{yi} \ \phi_{zi} \ u_{xj} \ v_{xj} \ w_{xj} \ \phi_{xj} \ \phi_{yj} \ \phi_{zj}]^T \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$[K]$ は求める剛性マトリクスで 14×14 正方マトリクスである。ここでは要素の配列を曲率面外変位に關するものと曲率面内変位に關するものとに分割して示すと、式(1)は式(4)のように示される。

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_\alpha \\ \delta_\beta \end{Bmatrix} \quad (4) \quad \text{ここで} \quad \begin{Bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{xi} \ My_i \ T_{xi} \ M_{xi} \ Q_{xj} \ My_j \ T_{xj} \ M_{xj} \\ Q_{yi} \ N_{xi} \ M_{xi} \ Q_{yj} \ N_{xj} \ M_{xj} \end{Bmatrix}^T \quad (5)$$



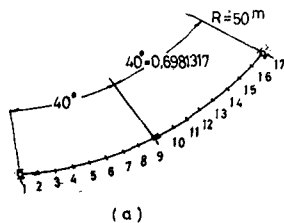
$$\left. \begin{aligned} \{\delta_\alpha\} &= [u_i \phi_{yi} \phi_{zi} u_{ji} \phi_{yj} \phi_{zj}]^T \\ \{\delta_\beta\} &= [v_i w_i \phi_{xi} v_{ji} w_{ji} \phi_{xj}]^T \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

剛性マトリックス $[K]$ の各小マトリックスは断面諸量の関数である。

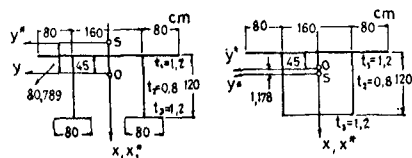
$$\left. \begin{aligned} [K_{\alpha\alpha}] &= [K_{\alpha\alpha}(J_y, C_y, J_w, J_T)] \\ [K_{\alpha\beta}] &= [K_{\alpha\beta}(Z_y, J_{xy}, C_x)] \\ [K_{\beta\beta}] &= [K_{\beta\beta}(F, Z_x, J_x)] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで断面諸量は次のように定義されている。

$$\left. \begin{aligned} F &= R \int_F \frac{1}{\rho} dF, \quad Z_x = R \int_F \frac{1}{\rho} y dF, \quad Z_y = R \int_F \frac{1}{\rho} x dF \\ J_x &= R \int_F \frac{1}{\rho} y^2 dF, \quad J_y = R \int_F \frac{1}{\rho} x^2 dF, \quad J_T = \frac{\rho}{R} \left[\frac{R}{\rho} r - \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\omega}{\rho} \right) \right)^2 dF \right] \\ C_x &= R \int_F \frac{1}{\rho} \omega y dF, \quad C_y = R \int_F \frac{1}{\rho} \omega x dF, \quad J_w = R \int_F \frac{1}{\rho} \omega^2 dF \end{aligned} \right\} \quad (8)$$



(a)



(b)

図-2 連続曲線橋と断面形状

3. 剛性マトリックスの特性 式(4)は任意軸に関する剛性

マトリックスであるが、今 ① 軸線 $i-j$ が中立軸の場合には $Z_x = Z_y = 0$ 、さらに

z, y 軸が主軸の場合には $J_{xy} = 0$ となる。

また ② 軸線 $i-j$ がせん断中心軸の場合には $C_x = C_y = 0$ である。

① ② いずれの場合においても断面が曲面に平行な軸

(y 軸) に関して対称な場合には $Z_y = J_{xy} = C_x = 0$

となる。以上二つは曲面外荷重のみが作用するときで

① の場合には $J_{xy} = C_x \neq 0$ 、主軸を選んでも $C_x \neq 0$ 、②

の場合は、 $Z_y = J_{xy} \neq 0$ となりいずれも $[K_{\alpha\beta}]$ はある

値をもつことになる。即ち曲面内変位 $\{\delta_\beta\}$ を生ずる。

断面が曲面に平行な軸に関して対称な場合には

$[K_{\alpha\beta}] = 0$ となるから $\{\delta_\beta\} = [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \{\delta_\alpha\}$ となり曲

率面外変位に関する方程式は独立して求められる。

曲線橋の断面諸量が直線橋のそれとほぼ等しいとみなせる

場合、主軸に對称な断面では軸線 $i-j$ が中立軸の場合、

$Z_x = Z_y = J_{xy} = C_y = 0$ 、 $C_x \neq 0$ 、軸線 $i-j$ がせん断中心軸

の場合、 $Z_x = J_{xy} = C_x = C_y = 0$ 、 $Z_y \neq 0$ となりいずれも

$[K_{\alpha\beta}]$ はある値をもつて面外荷重のみが作用して、曲面

内変位 $\{\delta_\beta\}$ を生ずる。

表-1 連続曲線橋の断面諸量

断面諸量	F cm ²	Z _x cm ²	Z _y cm ²	J _x cm ⁴	J _y cm ⁴	C _x cm ³	C _y cm ³	J _w cm ⁴	J _z cm ⁴
中曲線に 対称な 断面	0.768	0	0	5.3366	2.1312	4.7155	0	5.5688	3.1744
断面	0.768	0	0	4.9152	2.1312	5.7880	0	8.3310	2.6625
断面の 重心、重心 を表す	0.768	0	6.2045	5.8368	7.1438	0	0	1.7992	3.1744
断面	0.768	0	9.0444	4.9152	2.1323	0	0	8.2527	2.6625

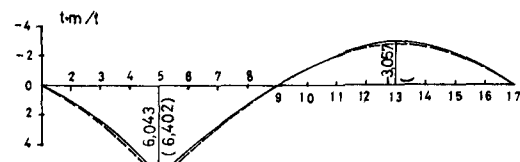
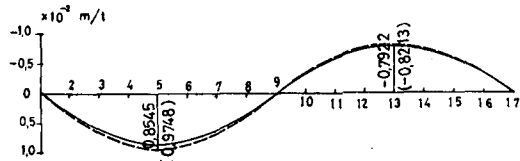


図-3 橋梁5におけるたわみと曲げモーメント影響線

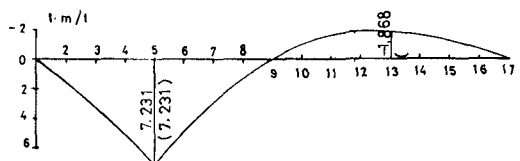
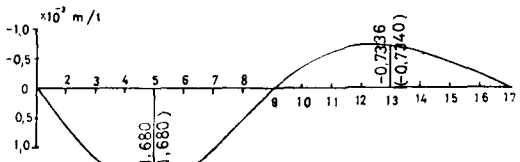


図-4 橋梁5のたわみと曲げモーメント影響線