粘弾性体の振動

秋田大学 (正) 赤木知之
〃 (学) ○目黒信一
〃 (学) 高橋啓輔

1 緒 言

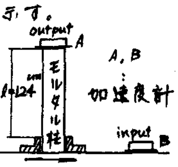
構造物の耐震問題を取り扱うとき構造物及び基礎の材料力学的性質として、弾性と流体粘性とを加味した形を考えるのが一般である。この取り扱いとして、普通、粘弾性モデルが用いられる。本報告は、モルタル片持ばりに強制変位による曲げ振動を加えて得られる動的応答観測(図-1)による結果と上述した粘弾性モデルにより算出された数値解との対比より粘弾性モデルについて若干の考察を行なったものである。

2 粘弾性片持ばりの強制曲げ振動の解

図-2に示す、3つの粘弾性モデルに対する振動方程式を示し、さらに、減衰パラメーターを各モデル定数によって、式(1)のように定義し、それぞれの加速度応答倍率(L_s)をこれらのパラメーターによって示す。

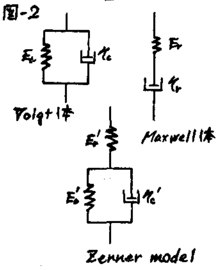
$$h_{vs}=T_c n_s,\quad h_{ms}=\frac{1}{T_r n_s},\quad h_{cs}=T_c' n_s,\quad h_{rs}=\frac{1}{T_r' n_s},\quad h_z=\frac{T_r'}{T_c} \qquad (1)$$

図-1



ここで、n_sは系の固有円振動数であり、$T_c=\frac{\eta_c}{E_c}$, $T_c'=\frac{\eta_c'}{E_c'}$, $T_r=\frac{\eta_r}{E_r}$, $T_r'=\frac{\eta_c'}{E_r'+E_c'}$ は材料の遅延時間，緩和時間を意味する。

図-2



a) Voigt体に対する解

振動方程式：$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\nu^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+B\frac{\partial^5 y}{\partial x^4\partial t}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ (2) ここで $\nu^2=\frac{E_c I g}{wA}$, $B=\frac{\eta_c I g}{wA}$

y：相対変位，ϕ：地動，w：単位体積重量，A：断面積，
I：断面二次率，E：弾性係数，η：粘性係数，g：重力加速度，

$y=Y(x)e^{i\omega t}$, $\phi=\phi_0 e^{i\omega t}$ を式(2)に代入すると次の関係が求められる。

$$(\nu^2+i\omega B)\frac{d^4Y}{dx^4}-\omega^2 Y=\omega^2\phi_0 \qquad (3)$$

ここで、$\frac{d^4Y}{dx^4}-g^4 Y=0$ (4) とおき、

境界条件 $x=0$: $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$, $x=\ell$: $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ (5) を適用すれば式(5)を満足した式(4)の解は、基準振動型$f_s(x)$を用い、かつ式(3)に代入し、基準振動の直交性を用いれば次式のようになる。

$$y=\sum_{s=1}^{\infty}\phi_0\omega^2\frac{(\nu^2g_s^4-\omega^2)-i(\omega B g_s^4)}{(\nu^2g_s^4-\omega^2)^2+(\omega B g_s^4)^2}\beta_s f_s(x)e^{i\omega t} \qquad (5)$$

ここで $f_s(x)=\frac{\sin g_s\ell-\sinh g_s\ell}{\cos g_s\ell+\cosh g_s\ell}(\sin g_s x-\sinh g_s x)+(\cos g_s x-\cosh g_s x)$, $\beta_s=\frac{\int_0^\ell f_s(x)dx}{\int_0^\ell f_s^2(x)dx}$, $1+\cos g_s\ell\cosh g_s\ell=0$

絶対変位：$z=y+\phi=\phi_0\left[\sum_{s=1}^{\infty}\omega^2\frac{(\nu^2g_s^4-\omega^2)-i\omega B g_s^4}{(\nu^2g_s^4-\omega^2)^2+(\omega B g_s^4)^2}\beta_s f_s(x)+1\right]e^{i\omega t}$ (6)

次に、式(1)に示したパラメーターh_{vs}を導入し、$\nu^2g_s^4=n_s^2$ とすれば $B=\frac{h_{vs}g_s^4}{n_s}$ となるから、地動に対する一次モードの加速度応答倍率L_1を次式のように得られる。

$$L_1=\sqrt{\frac{1+(h_{v1}^2+2\beta_1 f_1(\ell)-2)(\omega/n_1)^2+(1-\beta_1 f_1(\ell))^2(\omega/n_1)^4}{\{1-(\omega/n_1)^2\}^2+h_{v1}^2(\omega/n_1)^2}} \qquad (7)$$

$$\varphi_1=\tan^{-1}\frac{h_{v1}\beta_1 f_1(\ell)(\omega/n_1)^3}{1+(h_{v1}^2+\beta_1 f_1(\ell)-2)(\omega/n_1)^2+(1-\beta_1 f_1(\ell))(\omega/n_1)^4}$$

b) Maxwell体に対する解

振動方程式：$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+K\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}+L\frac{\partial^5 y}{\partial x^4\partial t}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-K\frac{\partial^3\phi}{\partial t^3}$ (8) ここで、$K=\frac{\eta_r}{E_r}$, $L=\frac{\eta_r I g}{wA}$,

相対変位：$y=\sum_{s=1}^{\infty}\phi_0(\omega^2+i\omega^3K)\frac{-\omega^2-i(\omega L g_s^4-\omega^3K)}{\omega^4+(\omega L g_s^4-\omega^3K)^2}\beta_s f_s(x)e^{i\omega t}$ (9)

絶対変位：$z=y+\phi=\phi_0\left[\sum_{s=1}^{\infty}(\omega^2+i\omega^3K)\frac{-\omega^2-i(\omega L g_s^4-\omega^3K)}{\omega^4+(\omega L g_s^4-\omega^3K)^2}\beta_s f_s(x)+1\right]e^{i\omega t}$ (10)

次に、式(1)に示したパラメーターh_{ms}を導入し、$\frac{E_r I g}{wA}g_s^4=n_s^2$ とすれば、$K=\frac{1}{h_{ms}n_s}$, $L=\frac{n_s}{h_{ms}g_s^4}$ となるから、応答倍率L_1は次のように得られる。

$$L_1=\sqrt{\frac{1+(1-\beta_1 f_1(\ell))\{h_{m1}^2(1-\beta_1 f_1(\ell))-2\}(\omega/n_1)^2+(1-\beta_1 f_1(\ell))^2(\omega/n_1)^4}{\{1-(\omega/n_1)^2\}^2+h_{m1}^2(\omega/n_1)^2}} \qquad (11)$$

$$\varphi_1=\tan^{-1}\frac{h_{m1}\beta_1 f_1(\ell)(\omega/n_1)}{1+\{h_{m1}^2(1-\beta_1 f_1(\ell))+\beta_1 f_1(\ell)-2\}(\omega/n_1)^2+(1-\beta_1 f_1(\ell))(\omega/n_1)^4}$$

c) Zenner model に対する解

振動方程式：$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+M\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}+u^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+N\frac{\partial^5 y}{\partial x^4\partial t}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-M\frac{\partial^3\phi}{\partial t^3}$ (12) ここで、$M=\frac{\eta_c'}{E_r'+E_c'}$，$u^2=\frac{E_r'E_c'Ig}{wA(E_r'+E_c')}$，$N=\frac{E_r'\eta_c'Ig}{wA(E_r'+E_c')}$

相対変位：$y=\sum_{s=1}^{\infty}\phi_0(\omega^2+i\omega^3M)\frac{(u^2g_s^4-\omega^2)-i(\omega Ng_s^4-\omega^3M)}{(u^2g_s^4-\omega^2)^2+(\omega Ng_s^4-\omega^3M)^2}\beta_s f_s(x)e^{i\omega t}$ (13)

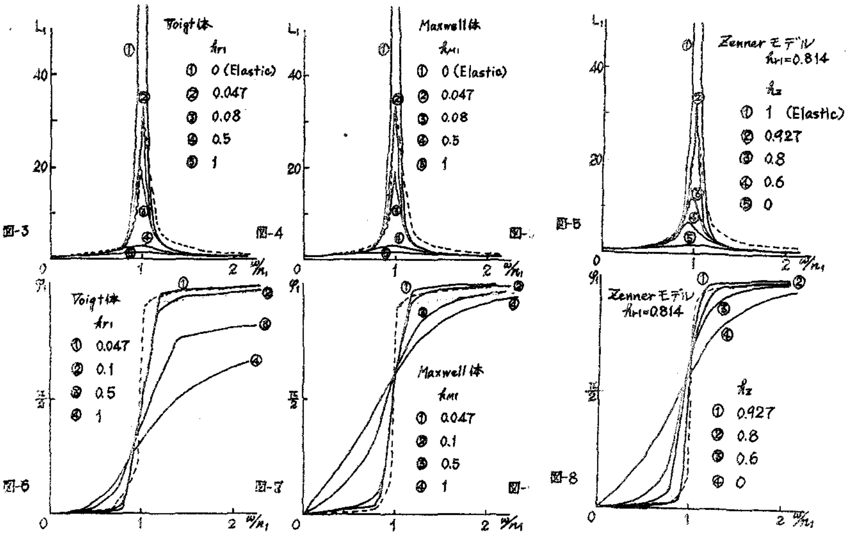
絶対変位：$z=y+\phi=\phi_0\left[\sum_{s=1}^{\infty}(\omega^2+i\omega^3M)\frac{(u^2g_s^4-\omega^2)-i(\omega Ng_s^4-\omega^3M)}{(u^2g_s^4-\omega^2)^2+(\omega Ng_s^4-\omega^3M)^2}\beta_s f_s(x)+1\right]e^{i\omega t}$ (14)

次に、式(1)に示したパラメーター k_{rs}，k_z を導入し、$\frac{E_r'Ig}{wA}g_s^4=n_s^2$ とすれば、$M=\frac{1}{k_{rs}n_s}$，$u^2=\frac{k_z n_s^2}{g_s^4}$，$N=\frac{n_s}{k_{rs}g_s^4}$ となるから、応答倍率 L_1 は次のように得られる。

$$L_1=\sqrt{\frac{(k_{r1}k_z)^2+\{1-2k_{r1}^2k_z(1-\beta_1f_1(l))\}(\omega/n_1)^2+(1-\beta_1f_1(l))\{k_{r1}^2(1-\beta_1f_1(l))-2\}(\omega/n_1)^4+(1-\beta_1f_1(l))^2(\omega/n_1)^6}{k_{r1}^2\{k_z-(\omega/n_1)^2\}^2+\{1-(\omega/n_1)^2\}^2(\omega/n_1)^2}}\quad(15)$$

$$\varphi_1=\tan^{-1}\frac{k_{r1}(1-k_z)\beta_1f_1(l)(\omega/n_1)^3}{(k_{r1}k_z)^2+\{1-k_{r1}^2k_z(2-\beta_1f_1(l))\}(\omega/n_1)^2+\{k_{r1}^2(1-\beta_1f_1(l))+\beta_1f_1(l)-2\}(\omega/n_1)^4+(1-\beta_1f_1(l))(\omega/n_1)^6}$$

これらの解を用いて、応答倍率曲線と位相差曲線を示すと図-3～8となる。図中破線は実験から得られたものである。これらの対比から、減衰パラメーターが次のように評価され、式(1)から実験材料の粘弾性定数が得られる。



3　結果と考察

実験の結果、1次共振の円振動数は94.2 ラジアン/sec，応答倍率 $L_1=33.4$，位相差 $\varphi_1=127.8°$ であった。いま、減衰パラメーターを十分に小とみれば、解式より近似的に $\omega/n_1=1$ のときに1次共振があらわれるものと考えることができる。Voigt体，Maxwell体に関しては、共振時の応答倍率を得て、簡単に次のモデル定数が得られる。

Voigt体……$k_{r1}=0.047$，　$T_c=5.0\times10^{-4}$ sec，　$E_c=176{,}000$ Kg/cm²

Maxwell体……$k_{M1}=0.047$，　$T_r=0.226$ sec，　$E_r=176{,}000$ Kg/cm²

しかし、Zenner体とした場合は、解式に k_{r1}，k_z と2個のパラメーターを含んでいる。そこで、共振時の位相差も合わせて観測すれば、次式よりこれらのパラメーターを評価できる。式(15)において $\omega/n_1=1$ と置いて

$$L_1^2=\frac{k_{r1}^2\{(k_z-1)+\beta_1f_1(l)\}^2+\beta_1^2f_1^2(l)}{k_{r1}^2(k_z-1)^2}\quad(16)\qquad\varphi_1=\tan^{-1}\frac{\beta_1f_1(l)}{k_{r1}\{(1-k_z)-\beta_1f_1(l)\}}\quad(17)$$

結局、$L_1=33.4$，$\tan\varphi_1=-1.289$ 及び、系によって決まる定数 $\beta_1f_1(l)=1.566$ を用いて

$k_{r1}=0.814$，$k_z=0.927$，$T_c'=0.014$ sec，$T_r'=0.013$ sec，$E_r'=176{,}000$ Kg/cm²，$E_c'=2{,}410{,}000$ Kg/cm²

ここで、k_z は振動モードには依存せず、材料の粘弾性特性をあらわすパラメーターである。$k_z=0$ でモデルはMaxwell体に退化し、$k_z=1$ で弾性体となる。結論としてZennerモデルが、材料を表示するのに適当であるといえる