

東北大学 工学部 正員 多谷虎男
東北大学 工学部 正員 遠藤信賢

(i) まえがき

各種構造物の振動解析に対して衝撃弾性波の伝播機構、特にその位相速度の研究、解析は、振動体の固有振動数と密接に関連しているという意味において極めて重要な意義を有するものである。弾性波の位相速度については、周知の様な、Elementary Theoryによる公式 $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ があるが、これは、Pochhammerの理論で $\alpha/\lambda \rightarrow 0$ なる極限的な場合における位相速度に相当する。しかし、吾々の研究結果では、従来のこれらの公式とは異なる結論に達した。以下に、その概要について説明を行く。

(ii) 解析の概要

固体弾性体内の弾性波は、次の波動方程式を満足しなければならない。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{G}{1-2\nu} \text{grad} \cdot \text{div} \mathbf{u} + G \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{X} \quad \text{--- ①}$$

ここで $\mathbf{u}$; 変位ベクトル、 ρ ; 密度、 ν ; ポアソン比、 G ; 剛性係数、 $\mathbf{X}$; ボディフォース。

①式に、変位ポテンシャルの導入を行へば、($\mathbf{u} = \text{grad} \phi + \text{rot} \psi$)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \phi = C_1 \nabla^4 \phi + \text{div} \mathbf{X} & \text{--- ②-1} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \psi = C_2 \nabla^4 \psi & \text{--- ②-2} \end{cases} \quad \begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} \\ C_2 &= \sqrt{\frac{G}{\rho}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 ϕ ; スカラーポテンシャル、 ψ ; ベクトルポテンシャル。

即ち、固体弾性体内の弾性波は、境界条件の如何を問はず、常に、②-1 ②-2 を満足しなければならない。②-1 で表わされる波を「ダイラレーションウェーブ」、②-2 で表わされる波を「ローテーションウェーブ」と呼ぶ。

さて、丸棒に、集中荷重的な衝撃を与へる場合について考へる。右図の様な円柱座標系をとり、スカラーポテンシャル ϕ 、ベクトルポテンシャル ψ を、それぞれ、次の様に仮定する。

$$\phi = U_0(r) \exp[i\{\alpha_1(l_1 r + m_1 z) - pt + \delta_1\}] \quad \text{--- ③}$$

$$\psi = \begin{Bmatrix} \psi_r \\ \psi_\theta \\ \psi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} V(r) \exp[i\{\alpha_2(l_2 r + m_2 z) - pt + \delta_2\}] \quad \text{--- ④}$$

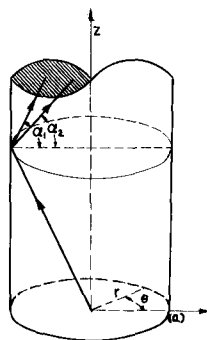
$$\begin{aligned} \because l_1 &= \cos \alpha_1, \quad m_1 = \sin \alpha_1, \quad l_2 = \cos \alpha_2, \quad m_2 = \sin \alpha_2, \quad m_1 r_1 = m_2 r_2 = r, \\ r_1 &= \frac{r}{C_1}, \quad r_2 = \frac{r}{C_2}, \quad r = \frac{r}{C}, \quad \delta_1 = -\alpha_1 l_1 r, \quad \delta_2 = -\alpha_2 l_2 r \end{aligned}$$

③を②-1に代入、④を②-2に代入して、それぞれ解く。

$$\phi = \{C_0 J_0(\alpha_1 r) + D_0 Y_0(\alpha_1 r) + K_0 J_0(\alpha_2 l_2 r) + L_0 Y_0(\alpha_2 l_2 r)\} \cdot \exp[i\{\alpha_1 r - pt\}] \quad \text{--- ⑤}$$

$$\psi = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \{C_1 J_1(\alpha_1 r) + D_1 Y_1(\alpha_1 r) + K_1 J_1(\alpha_2 l_2 r) + L_1 Y_1(\alpha_2 l_2 r)\} \cdot \exp[i\{\alpha_1 r - pt\}] \quad \text{--- ⑥}$$

となる。しかるに、合成変位 $\mathbf{u}$ は、次の様になる。



$$U = \left\{ \begin{array}{l} -\sigma_1 l_1 \{ K_0 J_1(\sigma_1 l_1 r) + L_0 Y_1(\sigma_1 l_1 r) \} \\ 0 \\ i \sigma_1 \{ K_0 J_0(\sigma_1 l_1 r) + L_0 Y_0(\sigma_1 l_1 r) \} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} -i \sigma_2 \{ K J_1(\sigma_2 l_2 r) + L Y_1(\sigma_2 l_2 r) \} \\ 0 \\ \sigma_2 l_2 \{ K J_0(\sigma_2 l_2 r) + L Y_0(\sigma_2 l_2 r) \} \end{array} \right\} \exp[i(\sigma z - p t)] \quad \text{--- ⑦}$$

⑦式、次の境界条件

$$\textcircled{1} \{ \sigma_r \}_{r=a} = 2G \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta \right\}_{r=a} = 0 \quad \textcircled{11} \{ \sigma_{r\theta} \}_{r=a} = G \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)_{r=a} = 0$$

$$\textcircled{12} \{ \sigma_{r\theta} \}_{r=a} = G \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right\}_{r=a} = 0 \quad \text{に代入して解く。ここで、条件①は、常に、}$$

成り立つ。(∵ U は変数 θ を含まない、 U_θ は常に 0 である) しかる、条件①、② から、

$$\left\{ \left(r^2 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) J_0(\sigma_1 l_1 a) - \frac{1}{a} J_0'(\sigma_1 l_1 a) \right\} K_0 + \left\{ \left(r^2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) Y_0(\sigma_2 l_2 a) - \frac{1}{a} Y_0'(\sigma_2 l_2 a) \right\} L_0 - i \sigma_1 \{ K J_1'(\sigma_2 l_2 a) + L Y_1'(\sigma_2 l_2 a) \} = 0 \quad \text{--- ⑧}$$

$$-2i \sigma_1 \sigma_2 K_0 J_1(\sigma_1 l_1 a) - 2i \sigma_1 L_0 Y_1(\sigma_1 l_1 a) + (r^2 - \sigma_2^2) \{ K J_1(\sigma_2 l_2 a) + L Y_1(\sigma_2 l_2 a) \} = 0 \quad \text{--- ⑨}$$

を得る。⑧、⑨式は、4個の積分定数を含んでいるので、常に満足されているのが解るが、更に実際の位相速度が、どの様になるかについて、次の5つの場合

$$\textcircled{1} r = \frac{P}{C} < r_1 = \frac{P}{C_1} < r_2 = \frac{P}{C_2} \quad \textcircled{2} r = \frac{P}{C} = r_1 = \frac{P}{C_1} < r_2 = \frac{P}{C_2} \quad \textcircled{3} r_1 = \frac{P}{C_1} < r = \frac{P}{C} < r_2 = \frac{P}{C_2}$$

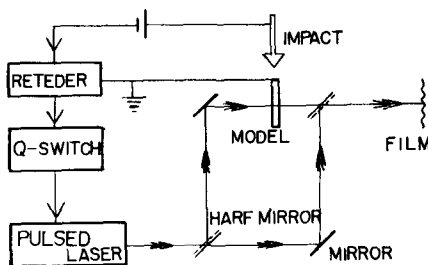
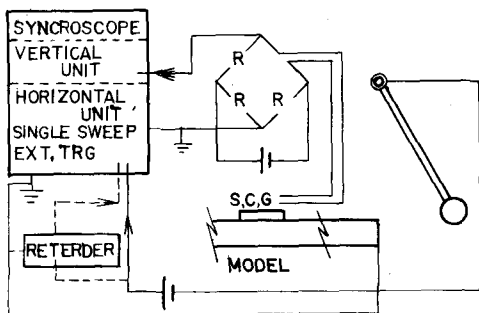
$$\textcircled{4} r_1 = \frac{P}{C_1} < r = \frac{P}{C} = r_2 = \frac{P}{C_2} \quad \textcircled{5} r_1 = \frac{P}{C_1} < r_2 = \frac{P}{C_2} < r = \frac{P}{C} \quad \text{に分別して考えると、見かけ上の位相速度でなく、Z方向の実際の位相速度は、常に } C_1 \text{ 又は、それ以下であることが、}$$

解る。

iii) 実験

(1) 方法 (A) Semi-conductor Gage による方法

(B) Mach-Zehnder 干渉計による方法



(2) 結果

MODEL: 丸金鋼

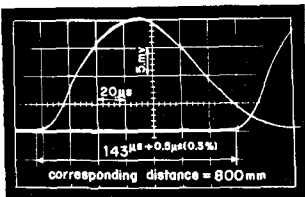
$$\phi = 30^{mm} \quad L = 3.000^{m}$$

(a) ゲージ位置 $2.000^{m}, 2.800^{m}$

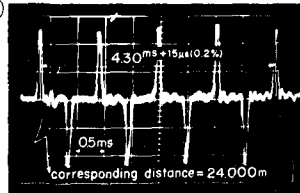
(b) " 1.500^{m}

他は、当日スライドにて発表する

(a)



(b)



参考文献

T. Taya "Tanser wave theory in solid Elastic Body of Three Dimensions Part 1 ~ 5" The Technology Reports of Tohoku U. ni. Vol 36 No2 ~ Vol 39 No1.

H. Kobayashi "Stress wave in solid" Dover Publication Inc. New York 1963