

グラフの木の性質を応用した有限要素解析

東北大学工学部 正員 佐武正雄

東北大学工学部 正員 〇新聞 茂

1. まえがき

節点で接続された有限要素の集合体は、力学的特性を有するネットワークと考えることができる。このような観点から、Lagerquist¹⁾、小西²⁾等は、接続された要素集合体を表すグラフの木の性質を節点の自由度が1の場合の有限要素解析に適用しているが、実際の構造物では、節点の自由度が1と考えられるような場合は、ごく少数の場合に限られ、一般に節点は n ($n \leq 6$)個の自由度をもつものと考えなければならないと思われる。節点の自由度が、複数の場合には、自由度が1の場合には存在しなかった相互結合の影響を考慮しなければならない。本文では、節点の自由度が n の有限要素解析にグラフの木の性質を応用する方法を示し、その応用例として不静定平面トラスの解析を示す。

2. グラフの木の性質の有限要素解析への応用

有限要素の有する力学的接続性をトポロジ的なグラフに抽象化し、節点で接続された要素集合体を表すグラフの木の性質を有限要素解析に適用する方法を説明する。トラスや梁の要素は、図-1(a)によって表わすことができる。また(b)は、平面応力あるいは平面歪状態の平板要素の接続特性を表現している。図-1の奥線および破線は、それぞれ x 、 y 方向の力学的特性に対応している。2本の枝の間の矢印は、これらの枝の間に相互結合が存在することを示すものとする。一般に、 n 個の自由度をもつ節点を有する要素は、 n 本の枝で表わされる。接続された要素集合体に対応する有向グラフの接続行列を $D_{a\lambda}$ 、局所座標系から大域座標系に変換された要素の剛性行列を $k_{\lambda\lambda}$ とすれば、荷重 P_a と変位 U^b の関係は、

$$P_a = K_{ab} U^b \quad (2.1)$$

$$\text{ここに } K_{ab} = D_{a\lambda}^T k_{\lambda\lambda} D_{\lambda b} \quad (2.2)$$

によって表わされる。繰りかえし現われる指標については和をとるものとする。また式(2.1)は、すでに境界条件が考慮されているものとするれば、式(2.2)の逆行列は

$$k^{ba} = z^{ba} / |K_{ab}| \quad (2.3)$$

と記され、 $|K_{ab}|$ 及び z^{ba} は次のように与えられる。ビネ・コーシー展開を用い

$$|K_{ab}| = D^{[k_1 k_2 \dots k_m]} \left(\frac{1}{m!} k_{k_1 \lambda_1} k_{k_2 \lambda_2} \dots k_{k_m \lambda_m} \right) D^{[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m]} \quad (2.4)$$

$$z_{ba} = D^{[k_2 \dots k_m]} \left[\frac{1}{(m-1)!} k_{k_2 \lambda_2} k_{k_3 \lambda_3} \dots k_{k_m \lambda_m} \right] D^{[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m]} \quad (2.5)$$

したがって、 $|K_{ab}|$ は、左右指標がそれぞれ m となるよう m 個の $k_{\lambda\lambda}$ の積 $k_{k_1 \lambda_1} k_{k_2 \lambda_2} \dots k_{k_m \lambda_m}$ の全ての代数和(符号は $D^{[k_1 k_2 \dots k_m]} / D^{[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m]}$)によって与えられる。ここに $D^{[k_1 k_2 \dots k_m]} = m! D^{[k_1] D^{[k_2] \dots D^{[k_m]}}$ 。また、 z_{ba} は左指標が a 点を変位0の点と同一点とみなした接続での木と右指標は b 点を変位0の点と同一点とみなした接続での木となる $k_{\lambda\lambda}$ の積の全ての組合せの代数和(符号は $D^{[k_1 \dots k_m]} / D^{[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m]}$)によって表現される。

3. 応用例

不静定平面トラスを例として、グラフの木の性質の有限要素解析への応用を説明する。図-2(a)の力学的性質の接続性は、(b)のグラフによって表わされるが、部材BC、ADは y 方向、また部材ABは x 方向の剛性が0であることを考慮すれば、(b)は(c)のグラフで置き換えられる。したがって、各部材の力学特性は

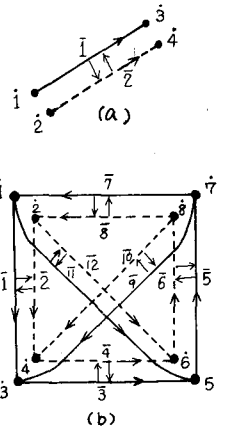
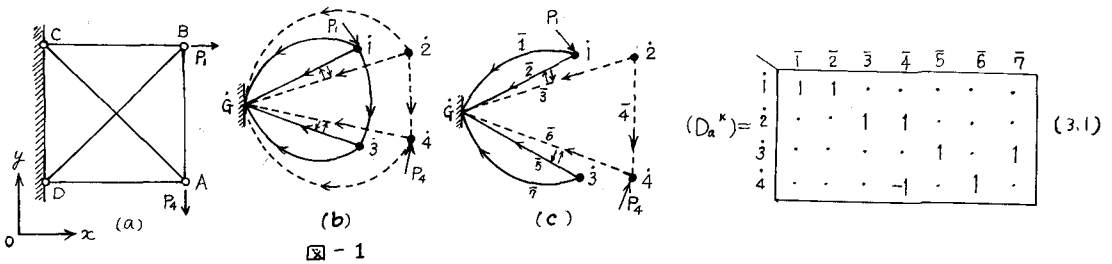


図-1



$$K_{BD} = \begin{pmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}, \quad K_{AC} = \begin{pmatrix} k_{55} & k_{56} \\ k_{65} & k_{66} \end{pmatrix}, \quad K_{BC} = k_1, \quad K_{AB} = k_4, \quad K_{AD} = k_7 \quad (3.2)$$

ここに $k_{\alpha\beta}$ は $k_{\alpha\beta}$ を表すものとする。式(3.1)は、図-2(c)の接続行列である。図-2(c)の木の統数は、

$|D_a^k \delta_{\alpha\lambda} D_a^k| = 12$ である。これらの木の枝の組み合わせは D_a^k の小行列式 $D^{[k_1 k_2 \dots k_m]}$ が ± 1 となるものを全て選び出すことによって求められ、相互結合が存在しない場合の $|K_{ab}|$ の値に対応する項を与える。相互結合の影響は、 $D^{[k_1 k_2 k_3 \bar{3}]} / D^{[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{3}]}$, $D^{[k_1 k_2 \bar{3} \bar{3}]} / D^{[\lambda_1 \lambda_2 \bar{3} \bar{3}]}$, $D^{[k_1 k_2 k_3 \bar{5} \bar{7}]} / D^{[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{5} \bar{7}]}$, $D^{[k_1 k_2 \bar{5} \bar{7}]} / D^{[\lambda_1 \lambda_2 \bar{5} \bar{7}]}$, $D^{[k_1 k_2 \bar{5} \bar{7}]} / D^{[\lambda_1 \lambda_2 \bar{5} \bar{7}]}$ の値が ± 1 となるような項に対応する $y^{\alpha\lambda}$ の積によって表わされる。 $D^{[k_1 k_2 k_3 \bar{2}]} / D^{[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{2}]}$ 等の値は、グラフの木の性質を用いて定めることができる。したがって $k_{ab} = k_{ba}$ を考慮すれば

$$\begin{aligned} |K_{ab}| = & k_1 k_3 k_4 k_5 + k_1 k_3 k_4 k_7 + k_1 k_3 k_4 k_6 + k_1 k_3 k_4 k_7 + k_1 k_3 k_5 k_6 + k_1 k_3 k_5 k_7 \\ & + k_1 k_3 k_5 k_6 + k_1 k_3 k_6 k_7 + k_1 k_4 k_5 k_6 + k_1 k_4 k_5 k_7 + k_1 k_4 k_6 k_7 + k_1 k_4 k_6 k_7 \\ & - (k_4 k_5 + k_5 k_6 + k_4 k_7 + k_6 k_7)(k_3)^2 - (k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_1 k_5 + k_1 k_6)(k_2)^2 + (k_2 k_3 k_5)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

今、図-2(a)の点Aに y 方向の荷重 P_2 が作用しているものとする。この場合は、点 $b (= 1, 2, 3, 4)$ と点 g 及び点 4 と点 g を同一点とした場合の2つのグラフの木を考察することにより、各節点の変位は、

$$u^1 = P_2 z_{14} / |K_{ab}| = P_2 k_{23} (k_4 k_5 + k_4 k_7) / |K_{ab}| \quad (3.4)$$

$$u^2 = P_2 z_{24} / |K_{ab}| = P_2 (k_1 k_4 k_5 + k_1 k_4 k_7 + k_1 k_5 k_6 + k_1 k_6 k_7) / |K_{ab}| \quad (3.5)$$

$$u^3 = P_2 z_{34} / |K_{ab}| = P_2 \{ k_5 k_6 (k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_3 + k_2 k_4) - (k_2 k_3)^2 k_6 k_7 \} / |K_{ab}| \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} u^4 = P_2 z_{44} / |K_{ab}| = & P_2 \{ k_1 k_3 k_5 + k_1 k_3 k_7 + k_1 k_4 k_5 + k_1 k_4 k_7 + k_1 k_5 k_6 + k_1 k_6 k_7 \\ & + k_2 k_4 k_5 + k_2 k_4 k_7 - (k_5 + k_7)(k_2 k_3)^2 \} / |K_{ab}| \end{aligned} \quad (3.7)$$

点Aに y 方向の荷重 P_2 と点Bに x 方向の荷重 P_1 が同時に作用する場合の変位は、荷重 P_1 だけによって生じる変位をそれぞれ、式(3.4)～(3.7)の対応する変位に加えることによって求められる。

3. あとがき

グラフの木の性質を用いて式(2.1)から変位 u^b を求める方法は、連立方程式のクレーマーの解法を図式的に行うことに対応している。しかし、直接クレーマーの解法によって u^b を求めるよりも、本文で述べた方法を用いる方が容易である。電子計算機で連立方程式を解く場合に、しばしば用いられる消去法や掃出し法と異なり、本文の方法によれば、丸めの誤差などを含まない解を求めることができる。また、この方法は、差分法などへの応用も可能であり、一般に、物理系をグラフで表現した場合、任意の点 α の物理的性質が点 α に接続している枝の物理特性によって定められるような全ての場合に対して応用可能である。

参考文献

- 1) Lagerquist, D.R. & Fenves, J. : Design Using Symbolic Topological Equations, ASCE, vol. 95, EM 3, 1969, pp. 695-709
- 2) 小西, 谷口, 山下 : グラフ理論による構造剛性演算に関する基礎的研究, 土木学会第29回年次学術講演会講演要録集, I-28, 1974, pp. 60-61
- 3) Okada, S. & Onodera, R. : A Unified Treatise on the Topology of Networks and Algebraic Electromagnetism, RAAG Memoirs, vol. 1, 1955, pp. 68-112
- 4) 小野寺, 大類 : 電気回路網と接続理論, 森北出版, 1973, pp. 107-111