

長波のジョーリングに関する研究

東北大学工学部 正 員 岩崎敏夫

東北大学工学部 正 員 佐藤道郎

東北大学大学院 学生員 〇貞野 明

1 諸言

最近長波の変形に関して、特に注目を集めているのは、適当な長波の初期値問題に対して、最初に波の前面が急になり、後面はなめらかになりやがては数個の安定な孤立波に分裂していくという、いわゆる Soliton の現象である。これは、一般に、鉛直加速度を無視した線型微小振幅波理論に対して、非線型項と波頂曲率を考慮する高次の導関数の項を含む方程式によって表わされる。この方程式は、初め Korteweg-de Vries⁽¹⁾ によって一様水深の場合について求められたので、K-dV 方程式とよばれているが、波形がなめらかなうちは、非線型項が卓越し、波形が急になってくる。一方、波頂曲率の項は、波形が急になると卓越し、なめらかにする働きがある。この両者の関係は、アーセル数 $Ur = (\eta_0^*/L)(L/H_0)^3$ により規定され、Zabusky-Galvin⁽²⁾ は、正弦周期波の境界値問題に対し、数値解を求め Ur が大きいほど、分裂の個数が多くなることを見だしている。一方、水深の変化する場合について、Mei-Mehauté⁽³⁾、角谷⁽⁴⁾ によって、同じような分散性の方程式が導かれているが、特に、Mei 等⁽⁵⁾ は $Ur = O(1)$ の領域について、特性曲線の方法を用いた、数値解析を行ない、水理実験の結果とかなり近い値を得ている。

本論文は、この Mei 等の方法にもとづき、図-1 に示すようなモデルについて、津波のジョーリングの効果を解析しようとするものである。

津波の外洋の波形は、岩崎一楊によって、浪源域より、非線型・非分散の長波の方程式も、数値的に解くことにより求められており、たとえば、十勝沖地震津波のあるケースに対して、水深 $H_0 = 350$ m のところで、波高 $\eta_0^* = 4$ m、周期 42 分の外洋津波が得られている。これは、線型長波の波速 $\sqrt{gH_0}$ を用いて、波長 L をおめると $L = 150$ km、アーセル数は、 $Ur = 2000$ という値になる。

Mei 等が扱った領域は、 $Ur = O(1)$ であり、非線型孤立波、クノイド波が存在する領域である。 $Ur \gg 1$ の領域についても、Shen-Meyer⁽⁶⁾、Carrier-Greenspan⁽⁷⁾ 等の研究があるが、それらはいずれも波高と水深が同じ程度、すなわち汀線近傍での現象をあつかったものであり、今回のような地形には適用できない。そこで $\beta \equiv \eta_0^*/H_0$ を新しいパラメーターとして、Mei 等の用いた摂動展開の方法を使って方程式を導き、適当なところで打ち切ると、 $Ur = O(1)$ の領域について求められた方程式と同一になることがわかる。

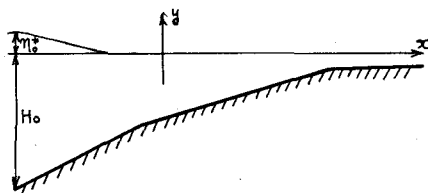


図-1 座標系

以下次第に、支配方程式の誘導と数値計算の方法を述べる。

2 支配方程式および数値計算法

二次元の非定常・非回転の完全流体に対して、座標系 (x^*, y^*, t^*) を考える。ここで x は水平方向、 y は鉛直方向の座標、 t は時間、 $*$ は次元量をおらわす。今、代表的な水平、鉛直の長さのスケール L, H_0 を使って次式のように無次元化する。

$$(\eta^*, x^*, y^*) = L \cdot (\eta, x, y) \quad x^* = L \cdot x / (g H_0)^{1/2} \\ \phi^* = L \cdot (g H_0)^{1/2} \cdot \phi(x, y, t) \quad (1)$$

ここで、 ϕ は速度ポテンシャル、 η は波高をあらわす。

支配方程式および境界条件は次式となる。

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (2)$$

$$y = -H(x) \quad (\text{海底}) \quad (3)$$

$$\phi_y = -H'(x) \cdot \phi_x \quad (4)$$

$$y = \eta(x, t) \quad (\text{自由表面}) \quad (5)$$

$$\eta_t + \phi_x \eta_x = \phi_y \quad (6)$$

$$\phi_t + (\phi_x^2 + \phi_y^2)/2 + \eta/\epsilon = 0 \quad (7)$$

$$\epsilon = H_0 / L \quad (8)$$

今、水深およびその変化率が微小であるという、浅海域の仮定をすることにより、 ϕ を次式のように摂動展開することができる。

$$(H, H', H'', H''') = O(\epsilon) \ll 1 \quad (9)$$

$$\phi(x, y, t) = \sum_0 (y+H)^m \phi^{(m)}(x, t) \quad (10)$$

あらたに、パラメーター $\delta \equiv \eta/\epsilon$ を導入し、 $\eta/\epsilon^3 \gg 1$, $1 > \delta > \epsilon > \delta^2$ の領域について、式(2), (4)を使い、式(10)を、式(6), (7)に代入し ϵ, δ の同階について整理すると次式を得る。

$$\eta_t + u \eta_x + (\eta+H) u_x - (H^3/6) u_{xxx} = A u + B u_x + (3/2) H^2 H' u_{xx} \\ + H (\eta_x H' + \eta H'') u + (\eta_x H H' + 3 \eta (H')^2 + 3 \eta H H'') u_x + 3 \eta H H' u_{xx} + (1/2) \eta H^2 u_{xxx} + O(\epsilon^4) \quad (11)$$

$$u_t + u u_x + \eta_x / \epsilon - (H^2/2) u_{xxt} = (H H')' u_t + 2 (H H') u_{xt} \\ + H H'' u u_x + (2 H' H'' + H H''') u u - 2 H H' u_x u_x - H H' u u_{xx} - H^2 u_x u_{xx} + O(\epsilon^4) \quad (12)$$

$$\text{ここで、} u(x, t) \equiv \phi_x^{(0)} = O(\delta) \quad (13)$$

$$A = A(x) = -H' + (H')^3 + 3 H H' H'' + H^2 H''' / 2 \quad (14)$$

$$B = B(x) = (3/2) (H^2 H')' \quad (15)$$

今、式(11), (12)について、各々 $O(\delta \cdot \epsilon^3)$, $O(\delta^2 \cdot \epsilon^2)$ で打ち切ることになると、式(11), (12)の右辺の各々、オ4項、オ3項以下が省略でき、Mei-Mehaute が $\eta/\epsilon^3 = O(1)$ の領域について導いた式と同一になる。

$$\eta_t + u \eta_x + (\eta+H) u_x - (H^3/6) u_{xxx} = A u + B u_x + (3/2) u_{xx} + O(\delta \epsilon^3) \quad (11')$$

$$u_t + u u_x + \eta_x / \epsilon - (H^2/2) u_{xxt} = (H H')' u_t + 2 (H H') u_{xt} + O(\delta^2 \epsilon^2) \quad (12')$$

式(11'), (12') は K-dV 方程式の変形されたものである。

式(11'), (12')の数値計算を行なう為には、Mei-Mehaute が行なった特性曲線への変数変換を次に引用する。

$$d\eta/dt = v, \quad dv/dt = a \quad (16)$$

$$dx/dt = \pm C_0(x) = \pm \sqrt{(3H/\epsilon)(1-(H')^2 - HH'')/(1-(1/2)HH'')} \quad (17)$$

$$\left(\frac{CH}{6} + \frac{uH}{2}\right) \frac{d\eta}{d\beta} + \frac{5}{12} H^2 H' \frac{dv}{d\beta} + \left(1 - \frac{1}{2} H H''\right) \frac{\epsilon H c^2}{6} \frac{du}{d\beta} + \frac{\epsilon C H^2}{12} \frac{da}{d\beta} \\ = \left(\frac{CH}{2} D + \frac{\epsilon H^2 C^2}{6}\right) u + \frac{H H'}{6} \left(\frac{5}{2} H - \epsilon C^2\right) a + \left(\frac{\eta C}{2} - \frac{H C}{3} + \left(\frac{H}{2} + \frac{\epsilon C^2}{6}\right) u\right) v \quad (18)$$

$$\text{ここで } D = (H'/H)\eta - H' + (H')^3 + (1/3)H^2H'' + 2HH'H'' \quad (19)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_0(x) \\ -C_0(x) \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\pm \mp \left(\frac{dx}{C_0(x)} \right) \right) = \text{const.} \quad (20)$$

式(16)~(20)は、 $dx/dt = 0, 0, \pm C_0(x)$ の4本の特性曲線上での変数 η, v, a, u に関する一階の連立常微分方程式であり、数値積分を行なうことにより、これらの解を求めることができる。

数値積分は、積分進行法によって逐次精度を高めて行く方法をとる。例えば、 $dy/dx = f(y, x)$ という微分方程式に対する積分公式は、

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2h(f_i + \frac{1}{6}\Delta^2 f_{i-1})$$

ここで、 h は x の分割の中、 $\Delta^2 f_{i-1} = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$ である。

左辺の y_{i+1} を使って右辺の $f_{i+1}(x, y)$ を計算し、さらに高精度の y_{i+1} を求めて行く方法である。くり返しの一番最初、 y_{i+1} が未知であるので、 $\Delta^2 f_{i-1}$ の代わりに $\Delta^2 f_{i-2}$ を用いる。この方法では、又あるいは3個の出力値を必要とするが、境界付近で出力値が不足する場合には、 $\Delta^2 f$ の項を省略して、いわゆる中央差分の方法を用いる。又、式(18)で用いてある、導関数の係数は $i+1, i-1$ 点での値の平均値をとる。

なお、計算結果については、講演のときに報告する予定である。

参考文献

- (1) Korteweg-de Vries, On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves, Phil. Mag. 39, 422, 1895
- (2) Zabusky-Galvin, Shallow-water waves, the Korteweg-de Vries equation and solitons, Trans. Am. Geophys. Union, 49, 209, 1968
- (3) Mei-Mehauté, Note on the equations of Long Waves over an Uneven Bottom, J. Geoph. Res. 71, 393, 1966
- (4) Kakutani, Effect of an Uneven Bottom on Gravity waves, J. Phys. Soc. Japan, 30, 1971
- (5) Mei-Madsen, The transformation of a solitary wave over an uneven bottom, J. Fluid Mech. 39, 1969
- (6) Shen-Meyer, Climb of a bore on a sloping beach, J. Fluid Mech. 16, 1963
- (7) Carrier-Greenspan, Water waves of finite amplitude on a sloping beach, J. Fluid Mech. 4, 1958