

流れを伝播する表面波のエネルギーについて

東北大学工学部 正員 佐藤道郎

§1. まえがき

流れの表面を伝播していく波の波高変化を求める場合に基本となる波エネルギー収支について 波の進行方向に流れの速さが変化する時のものは Longuet-Higgins と Stewart (1961年)⁽¹⁾ によって解析され、Unna にはじまる波エネルギー流束が一定とするそれまでの考え方が修正された。その解析は 流れの水深方向の流速分布は一樣として非回転運動としてなされたものである。一方、海岸工学の対象となる流れの場では、流速分布は一樣でない場合が多く、その適用にあたっては、流速分布の影響、さらには、乱れ、水面勾配といった要因がどのように影響してくるかを検討しておく必要があると考えられる。そこで、本研究では、流速分布、乱れ、水面勾配等を考慮して二次元不均流上での波エネルギーの収支を求め、波高変化の実際的な計算について述べる。

§2. 波エネルギーの収支

運動は二次元とし、右図のように x 軸を平均水面上にとり、 y 軸をそれと垂直上向きにとる。水深を h とし、平均面からの水位変動を η 、 x , y 方向の水の速度成分を u , v とする。ただし、 (u', v') は流れの速度成分 (U, V) と波の速度成分 (u, v) の和として表わされるものとする。

$$(1) \quad u' = U + u, \quad v' = V + v$$

また、水面の水平に対する傾きを θ とし、 u', v' の運動のポテンシャルエネルギーの水平基準線として $y = H_L$ をとる。流れは乱流として、乱れに関して平均された運動方程式と連続方程式は次のとおりである。

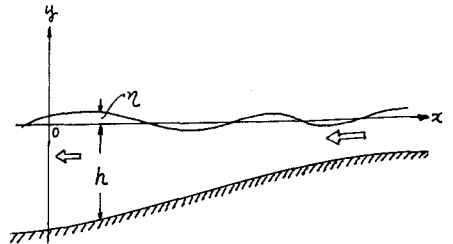


図-1

$$(2) \quad \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right)$$

$$(3) \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right)$$

$$(4) \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

ただし、 ρ は水の密度、 g は重力加速度、 p は圧力、 t は時間、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ はレイノルズ応力成分である。
(2) に $\rho u'$, (3) に $\rho v'$ を乗じ、底から水面まで積分し、(4) と次に示す水面と水底での条件を用いて変形の後、波一周期にわたって平均して上付きの横線で示すことにすれば (7) で表わされる流れと波の共存場における全エネルギーの収支関係を得る。

$$(5) \quad (v')_t = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (u')_x \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$(6) \quad (v')_{xh} = -(u')_{yh} \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (u'^2 + v'^2) + \rho g \cos \theta (y - H_L) \right\} dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (u'^2 + v'^2) + p + \rho g \cos \theta (y - H_L) \right\} u' dy \right. \\ \left. = \int_{-h}^{\eta} u' \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dy + \int_{-h}^{\eta} v' \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dy \right.$$

波のエネルギーに関しては、(1)を考慮し、(7)式を変形して若干の計算の後、次の関係を得る。

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \cdot \eta^2 \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + p + \rho g \cos \theta \cdot y \right\} u dy + \int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \eta dy + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \cdot \eta^2 \cdot \eta \right\} \\ = \rho g \sin \theta \int_{-h}^{\eta} u dy + \rho g \cos \theta \cdot \eta \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \cos \theta \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \int_{-h}^{\eta} \rho (\eta + u) u \frac{\partial \eta}{\partial x} dy - \int_{-h}^{\eta} \rho (\eta + v) v \frac{\partial \eta}{\partial y} dy - \int_{-h}^{\eta} \rho (\eta + u) v \frac{\partial \eta}{\partial x} dy \\ - \int_{-h}^{\eta} \rho (\eta + v) u \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \int_{-h}^{\eta} u \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) dy + \int_{-h}^{\eta} v \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) dy$$

(8) 式の左辺第一項の〔 〕内は波エネルギー密度、第二項の〔 〕内は波エネルギー流束を表わし、右辺は波エネルギーに関する湧出を与えるもので、不等流上では波と流れの間にかなり複雑な相互作用がみられる。なお式中、例えば η は $y = \eta$ における η を意味する。

ところで、流れは漸変流とし、 $\partial \eta / \partial y$ に較べて $\partial \eta / \partial x$, $\partial v / \partial y$, $\partial \eta / \partial x$ を無視し、 $\partial \eta / \partial y$ に較べて $\partial v / \partial x$ を無視して、波の振中の二次までの近似で表わせば、次のように幾分簡単になる。 θ は、 $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \tan \theta = l_s$ (l_s : 水面勾配) とおける程度として、

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (\overline{u^2 + v^2}) dy + \frac{1}{2} \rho g \overline{\eta^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{-h}^{\eta} \overline{p u} dy + \int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (\overline{u^2 + v^2}) \eta dy + \frac{1}{2} \rho g \overline{\eta^2} \cdot \eta \right\} \\ = - \left\{ \int_{-h}^{\eta} \rho (\overline{u^2 - v^2}) \frac{\partial \eta}{\partial x} dy + \frac{1}{2} \rho g \overline{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} + \rho g \eta \overline{u_0} \left\{ l_s - \frac{d}{dx} \left(\frac{\eta_0^2}{2g} \right) \right\} - \int_{-h}^{\eta} \rho \overline{u v} \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \int_{-h}^{\eta} \overline{u} \frac{\partial \eta}{\partial y} dy$$

いま、流れは断面で一様とし、流れも波もエネルギーの逸散が無いものとすれば、(9)式右辺第二項の〔 〕内は流れのエネルギー勾配であるから零となり、第三項も第四項も消え、第一項の〔 〕だけが残り、それは次のように表わされる。

$$(10) \quad (9) \text{式右辺第一項} = - \left\{ \int_{-h}^{\eta} \rho (\overline{u^2 - v^2}) dy + \frac{1}{2} \rho g \overline{\eta^2} \right\} \frac{d\eta}{dx} = -E \left(\frac{2mh}{\sinh 2mh} + \frac{1}{2} \right) \frac{d\eta}{dx} = -S_x \frac{d\eta}{dx}$$

$$(11) \quad S_x = E \left(\frac{2mh}{\sinh 2mh} + \frac{1}{2} \right) \quad \left(m = \frac{2\pi}{L}, L: \text{波長}; E: \text{エネルギー密度} \right)$$

波エネルギー密度を E 、波エネルギー流束を $E \cdot C_E$ (C_E : 波エネルギーの輸送速度) と表わせば、一様分布の場合 C_E は群速度 C_g と等しいから、(9)式は次のようになり、Longuet-Higgins と Stewart によって得られたものとなる。

$$(12) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (E \cdot C_g) = -S_x \frac{d\eta}{dx}$$

§3. 不等流上での波高変化

(9)式をもとに不等流上での波高変化を求めることができるが、この綿密な計算はかなり複雑で実用的でない。また、(9)式は近似的には、Longuet-Higgins と Stewart によって得られた結果に、右辺第二項、第三項、第四項で表わされる流れのエネルギー勾配、流速分布、乱流の効果は補正項として加わってきたものと見ることができ、その立場からより実的な計算法を示す。

まず、(9)式右辺の項を次のように置いてみる。

$$(13) \quad 2\alpha_0 \cdot E \cdot C_E = \int_{-h}^{\eta} \rho (\overline{u^2 - v^2}) \frac{\partial \eta}{\partial x} dy + \frac{1}{2} \rho g \overline{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = S_x \frac{d\eta}{dx}$$

$$(14) \quad 2\alpha_1 \cdot E \cdot C_E = -\rho g \eta \overline{u_0} \left\{ l_s - \frac{d}{dx} \left(\frac{\eta_0^2}{2g} \right) \right\} + \int_{-h}^{\eta} \rho \overline{u v} \frac{\partial \eta}{\partial y} dy - \int_{-h}^{\eta} \overline{u} \frac{\partial \eta}{\partial y} dy$$

すると(9)式は次のように表わすことができる。

$$(15) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(E \cdot C_E) = -2\alpha_0 \cdot E \cdot C_E - 2\alpha_1 \cdot E \cdot C_E$$

波は規則波とし $\partial E / \partial t$ は 0 とし、 C_E は一様分布としたときの群速度 C_g で近似する。 $x=0$ における E , C_g , 波高 H をそれぞれ E_0 , C_{g0} , H_0 とすれば、 E を $\frac{1}{2} \rho g H^2$ で近似して、波エネルギーおよび波高の変化は次のようになる。

$$(16) \quad \frac{E}{E_0} = \frac{C_{g0}}{C_g} \cdot e^{-2 \int_0^x \alpha_0 dx} \cdot e^{-2 \int_0^x \alpha_1 dx}$$

$$(17) \quad \frac{H}{H_0} = \left(\frac{C_{g0}}{C_g} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\int_0^x \alpha_0 dx} \cdot e^{-\int_0^x \alpha_1 dx}$$

図1に示すような流れを遡上する波の波高の変化を考えてみる。(17)の右辺の $(C_{g0}/C_g)^{\frac{1}{2}}$ は波の遡上にももたれて向い流れが速くなるので C_{gi} は次第に小さくなるから、1より大となる。次に $e^{-\int_0^x \alpha_0 dx}$ は(13)より、 α_0 は次のように表わされ、 $dU/dx < 0$ となって $-\int_0^x \alpha_0 dx > 0$ であるから1より大となる。

$$(18) \quad \alpha_0 = \frac{S_x}{2C_g} \cdot \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2C_g} \left(\frac{2mh}{\sinh 2mh} + \frac{1}{2} \right) \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2C_g} \left(2 \cdot \frac{C_g - U}{C - U} - \frac{1}{2} \right) \frac{dU}{dx}$$

また、 $e^{-\int_0^x \alpha_1 dx}$ については、 α_1 は流れを遡上する場合に正となって波高を減衰させるように作用する(参考文献(2))ので、1より小となる。したがって、この場合の波高の変化は、 $(\frac{C_{g0}}{C_g})^{\frac{1}{2}} e^{-\int_0^x \alpha_0 dx}$ の波高を増大させようとする因子と $e^{-\int_0^x \alpha_1 dx}$ の波高を減衰させようとする因子との兼ね合いで決まってくることになる。

(17)を計算するにあたり、式中の積分は数値積分によらなければならないので、台形公式を用いることにする。計算区間を m 等分し、

$$e^{-\int_0^x \alpha dx} = e^{\frac{\Delta x}{2} [\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{m-1} + \alpha_n]} = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1)\Delta x} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\Delta x} \cdot \dots \cdot e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{m-1} + \alpha_n)\Delta x}$$

また、

$$\left(\frac{C_{g0}}{C_g} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{C_{g0}}{C_{g1}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{C_{g1}}{C_{g2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{C_{gm-1}}{C_g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

を考慮すれば、(17)は次のように表わされる。

$$(19) \quad \frac{H}{H_0} = \prod_{i=0}^m \left(\frac{C_{gi}}{C_{g,i+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{0i} + \alpha_{0,i+1})\Delta x} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{1i} + \alpha_{1,i+1})\Delta x}$$

一方、 $\frac{H}{H_0} = \frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{H_3}{H_2} \cdot \dots \cdot \frac{H}{H_{m-1}}$ であるから、不等流計算により水面形を求め水深、流速等を計算し

$$(20) \quad \frac{H_{i+1}}{H_i} = \left(\frac{C_{gi}}{C_{g,i+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{0i} + \alpha_{0,i+1})\Delta x} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{1i} + \alpha_{1,i+1})\Delta x}$$

を各分長について求めることによって計算される。 α_0 は(18)で与えられ、 α_1 は文献(2)で計算されるものを用いることができよう。計算例は紙数の都合上、講演時に示す。

本研究を行うにあたり終始ご指導を賜った東北大学工学部 名崎敏夫教授に深く感謝の意を表します。また、本研究は文部省科学研究補助金(奨励研究A)の助成を受けて行、たものであることを付記し謝意を表します。

参考文献

- (1) M.S. Longuet-Higgins & R.W. Stewart: The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents., Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 11, 1961.
- (2) 近藤 道 郎: 流れを遡る波のエネルギーの減衰について(III), 第20回海岸工学講演会論文集, 1973.