

1. はじめに. 多孔質材料の圧密は, 例えは, 重量構造物による粘土地盤の沈下, 地下水の汲上げによる地盤沈下, アースフルタムなどの時間的変動を予測するために土質力学の分野で重要な問題の一つである. 圧密の問題は, Terzaghi の一次圧密理論が発表されて以来数多くの人々により研究されてきたが, 三次元圧密理論まで拡張されたものは, 大別して熱弾塑性偏微分方程式の Terzaghi-Rendulic 系則と Biot により 1941 年に確立された多元連立偏微分方程式の Biot 系則のものがある. 後者は孔隙水と骨格の相互作用により明確に, 同時に知ることのできるので多孔質材料の変形特性解析に重要と見られる. しかも, この後 Biot は不可逆現象の熱力学的位置より多孔質弾塑性材料の圧密理論を一般化している. また, 多孔質材料の圧密に関する数多くの彼の論文のうちで不飽和材料については, 土壌中のみ飽和材料と区別して取り扱っているがそれ以後は, 不飽和材料における流体の影響は圧密現象の概念に含まれている. ところで, 有限要素法により土の圧密問題を解かれるようになったのは比較的新しく, 通称平衡法原理の公式化と有限要素法による展開は Sandhu, Wilson, 横尾, 山縣, 長岡, 森, 川本⁶⁾などにより報告されているが, これらは飽和多孔質弾塑性材料の圧密に対するものである.

本報告においては, Biot により表わされる圧密理論の支配方程式が Biot による連成熱弾塑性の方程式に形の上で類似していることに注目し, 不飽和土の圧密に対する有限要素法のための公式化を連成熱弾塑性の支配方程式で展開し, 必要とする解法を導いた.

2. 支配方程式. 流体と土粒を含む均質多孔質固体を考慮する. いきづなりと見做すれば, その材料に対する平衡方程式は次のように表わされる.

$$\sigma_{ij,j} + \rho_i F_i = 0 \quad \text{----- (1)}$$

ここに, σ_{ij} : 応力テンソル, ρ_i : 材料の質量密度, F_i : 単位質量当りの物体力の成分, 之らに, $\sigma_{ii}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ は土質力学での全応力と意味する. 固体の変位成分を u_i と表示すると固体のひずみ成分は,

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{----- (2)}$$

である. 線形理論における応力-ひずみ関係は,

$$\sigma_{ij} + \alpha_{ij} P = C_{ijkl} e_{kl} \quad \text{----- (3)}$$

ここに, P : 孔隙水圧, α_{ij} : 二次の圧縮テンソル, C_{ijkl} : 21個の弾性率数に類似したテンソルで表示される.

v_i により流体変位とあらわすものとすれば, Darcy の法則の一般化的形は,

$$v_i = \dot{u}_i - \dot{u}_i = -k_{ij} (P_{,j} + \rho_w F_{j,}) \quad \text{----- (4)}$$

ここに, v_i : 流体流動成分, k_{ij} : 透水テンソル, ρ_w : 流体の質量密度で表示される.

単位時間内の単位体積当りの流入速度 v_i は空隙の体積変化と固体の変形の項よりなる. 多孔質固体の中に注入される流体の量を ϕ で表わし, 一方その体積は一定に保たれるものとする流入速度は次のように表示される.

$$-v_{i,i} = \dot{\phi} + \alpha_{ij} \dot{e}_{ij} \quad \text{----- (5)}$$

ここで, dot は時間に関しての微分とあらわす.

3. 変分方程式. 熱弾性テンソル ρ_i と α_{ij} , 温度変化 θ と P , 固体の単位体積当りの比熱 c と ρ_w を置き換えることにより, 温度変化のない場合に対する連成熱弾性の場の方程式とたやすく得ることのできる. それゆえ, 前節の場の方程式に相当する不飽和多孔質弾塑性固体のための変分方程式は熱弾性に対する類似的解釈により導かれる.^{6,10)} 二つの不変量 γ と ψ を導入し, 不変量 γ は体積積分により,

$$\gamma = \int (W + \frac{1}{2} \frac{P^2}{\alpha}) dV \quad \text{---- (6)}, \quad \text{ここに: } W = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{kl} e_{ij} \quad \text{----- (7)}$$

とあらわされ, 弾性圧密ポテンシャルと呼ぶことができる. v_i により流入体積の成分とあらわすと,

$$\vec{v}_i = v_i \quad \text{--- (8)}; \quad -T_{i,i} = P/Q + \alpha_{ij} e_{ij} \quad \text{--- (9)}$$

と表示される。固相圧力はこのとき、二つのベクトル場の項で

$$P = -Q \{ T_{i,i} + \frac{1}{2} \alpha_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) \} \quad \text{--- (10)}$$

のようにならわされる。不変量 \$Q\$ の変化は次のように表示される。

$$\delta Q = \int \lambda_{ij} \vec{v}_i \delta v_j dV \quad \text{--- (11)}$$

ここに、\$\lambda_{ij}\$ 流れの抵抗テンソル。抵抗テンソル \$\lambda_{ij}\$ は歪水テンソル \$e_{ij}\$ の逆であり、不変量 \$Q\$ は散逸関数の役割をする。弾性圧縮ポテンシヤル、流入体積、流動はおのおの熱弾性論における熱弾性ポテンシヤル、エントロピー変位、熱流に相当するので圧縮性場に対する変分方程式は次のように表示される。

$$\delta Y + \delta Q = \int \rho_i F_i \delta u_i dV - \int \rho_o F_o \delta v_o dV + \int (\vec{t}_i \delta u_i - \rho_o \delta v_i v_i) ds \quad \text{--- (12)}$$

ここで \$ds\$ は境界表面の積であり、\$\vec{t}_i\$ は表面力、\$\rho_o\$ は境界外側より作用する圧縮圧力、\$v_i\$ は外側に向う単位法線の方角余弦成分である。

4. 有限要素法への定式化 要素内の固相圧力 \$P\$ が座標の一次関数により表示されるものとすれば \$F_0(9)\$ より二次の内挿関数で固相の変位と流入体積に対して用いられ、固相の変位と流入体積はおのおの節点値の項で定義される。\$\{u\} = [N]\{u\}^e\$ --- (13); \$\{v\} = [N]\{v\}^e\$ --- (14)

\$F_0(2)\$ のみずみ-変位関係は次のように表示される。

$$\{e\} = [B]\{u\}^e \quad \text{--- (15)}$$

ここで、\$\{e\}\$ はみずみベクトル、\$[B]\$ は \$F_0(2)\$ と \$F_0(10)\$ より導かれる変換マトリックスであり、\$F_0(12)\$ と \$F_0(14)\$ を \$F_0(10)\$ に代入すると要素内の固相圧力に対して次のよう表示される。

$$P = -Q \{ A_1 [B] \{v\}^e + A_2 [B] \{u\}^e \} \quad \text{--- (16)}$$

$$\text{ここで、} A_1 = [1, 1, 1], \quad A_2 = [\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{32}] \quad \text{--- (17)}$$

\$[B]\$ はマトリックス \$[B]\$ からセン断みずみ成分を取り除くことによりつくられる変換マトリックスである。従って、
 $P^e = Q \{ A_1 [B] \{v\}^e + A_2 [B] \{u\}^e \}^T \{ A_1 [B] \{v\}^e + A_2 [B] \{u\}^e \} \quad \text{--- (18)}$

となり、要素に対して \$F_0(12)\$ を適用すると左辺のおのおの項は次のようになる。

$$\delta Y = \int \{ \delta u \}^T [B] [D] [B] \{u\}^e dV + Q \{ \{ \delta u \}^T [B] \}^T A_2 [B] \{u\}^e + [B] \}^T A_1 [B] \{v\}^e \} dV + Q \{ \{ \delta v \}^T [B] \}^T A_1 [B] \{u\}^e + [B] \}^T A_2 [B] \{v\}^e \} dV \quad \text{--- (19)}$$

$$\delta Q = \int \{ \{ \delta v \}^T [N] \}^T [D_r] [N] \{v\}^e dV \quad \text{--- (20)}$$

ここで、\$[D]\$ と \$[D_r]\$ はおのおの要素に対する弾性マトリックスと流れの抵抗マトリックスである。\$F_0(12)\$ の物体力と境界力の板型仕事は、

$$\int \rho_i F_i \delta u_i dV = \int \{ \delta u \}^T [N] \}^T \{ F \}^e dV \quad \text{--- (21)}; \quad \int \rho_o F_o \delta v_o dV = \int \{ \delta v \}^T [N] \}^T \{ P \}^e dV \quad \text{--- (22)}$$

$$\int \vec{t}_i \delta u_i ds = \{ \{ \delta u \}^T \}^T \{ F \}^e \quad \text{--- (23)}; \quad \int \rho_o \delta v_i v_i dV = \{ \delta v \}^T [H] \{ P \}^e = \{ \delta v \}^T \{ G \}^e \quad \text{--- (24)}$$

と表わされ、\$\{P\}^e\$ は物体力 \$\rho_o F_o\$ の列ベクトル、\$\{F\}^e\$ は等価節点荷重列ベクトル、\$[H]\$ は境界外側に沿う固相圧力と流入体積の内挿関数の積として積分により導かれるマトリックス、\$\{P\}^e\$ は節点における固相水圧の列ベクトルである。変分 \$\{u\}^e\$ と \$\{v\}^e\$ は任意であるので \$F_0(19)\$ から \$F_0(24)\$ までを \$F_0(12)\$ に代入すると次の方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \{ F \}^e &= ([K] + [L_o]) \{u\}^e + [L_s] \{v\}^e + \{ F \}^e \\ - \{ G \}^e &= [L_s] \{u\}^e + [L_o] \{v\}^e + [M] \{v\}^e - \{ F \}^e \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (25)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} [K] &= \int [B]^T [D] [B] dV, [L_o] = Q \int [B]^T A_2 [B] dV, [L_s] = Q \int [B]^T A_1 A_2 [B] dV \\ [L_s] &= Q \int [B]^T A_1 A_2 [B] dV, [L_o] = Q \int [B]^T A_2 A_1 [B] dV, [M] = \int [N]^T [D_r] [N] dV \\ \{ F \}^e &= \int [N]^T \{ F \}^e dV, \{ G \}^e = \int [N]^T \{ P \}^e dV \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (26)}$$

\$F_0(12)\$ の第一式は平衡方程式とあらわし、第二式は流れの方程式と意味し、これらは任意の時刻に対して適用できる。ここで \$v\$ が任意の時間微分 \$dv/dt\$ の面に時間に対して微分的に変化するものとすれば、\$\{ \dot{v} \}^e\$ は次のように表示

される。 $\{\dot{v}\}_{k+\Delta t}^e = \frac{2}{\Delta t} \{v\}_{k+\Delta t}^e - (\frac{2}{\Delta t} \{v\}_{k+\Delta t}^e + \{\dot{v}\}_{k+\Delta t-\Delta t}^e) = \frac{2}{\Delta t} \{v\}_{k+\Delta t}^e - \{G_T\}_{k+\Delta t-\Delta t}^e$ ----- (21)

Eq(25)に前述の表示を代入すると

$$\begin{Bmatrix} F \\ G \end{Bmatrix}_k^e + \begin{Bmatrix} F \\ F \end{Bmatrix}_k^e + \begin{Bmatrix} 0 \\ G_T \end{Bmatrix}_{k-\Delta t}^e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_k^e$$
 ----- (22)

ここに $[K_{11}] = [K] + [L_2]$; $[K_{12}] = [L_1]$; $[K_{21}] = [L_2]$; $[K_{22}] = [L_3] + \frac{2}{\Delta t} [M]$; $\{G_T\} = [M] \{G_T\}^e$ ----- (23)

なる。なお、完全等方性体の場合、Eq(22)は次のように

$$[K_{11}] = [K] + \alpha [L]; [K_{12}] = [K_{21}] = \alpha [L]; [K_{22}] = [L] + \frac{2\alpha}{\Delta t} [M]; [L] = Q [B]^T [A] [B] dV; [M] = \frac{1}{6} [N]^T [N] dV$$
 ----- (24)

なるが詳しくは文献11)に示されている。全領域にわたってEq(22)を重ね合わせると全体の糸についての剛性方程式が得られる。Eq(22)は反復形式であるのでstep-by-stepの手法により解かれる。

5. 数値例 Fig.1は、土柱の上面からのみ流体の流れを許すような一軸圧縮試験のような一軸圧縮問題に対して解析の手法により求められる有限要素法の結果とBiotの解析解と比較されている。参考のため飽和土に対するBiotの解の圧縮曲線も描かれている。 $\alpha = 0.98$ の不飽和土は挙動に関して飽和土とほとんど類似している。図における瞬間、最終圧縮率についての物理的意味は文献1)に述べられている。この問題に関しては、一次と二次の内挿関数による有限要素法の解に相違はみられない。Fig.2には α の値の影響が図に示されているが E, ν 、土の最終圧縮に対する瞬間圧縮率の比は一定としている。図は α の値が小さいほど沈下が早くおこることを示している。Fig.3は $\alpha = 0.98$ における流量曲線である。

6. おわりに ここに示された有限要素法による圧縮変形解析の手順は、一般の異方弾性不飽和土に対しても適用される。あゆまされた数値例は一軸圧縮問題に示されているが手法の有効性は確認される。

(参考文献)

- 1) Biot, M.A., "General Theory of Three-Dimensional Consolidation," J. Appl. Vol.12, No.2, 1941;
- 2) Biot, M.A., "Consolidation Settlement under a Rectangular Load Distribution," J. Appl. Phys. Vol.12, No.10, 1941;
- 3) Biot, M.A., "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid," J. Appl. Phys. Vol.26, No.3, 1955;
- 4) Biot, M.A., "General Solution of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material," J. Appl. Mech. Vol.23, No.3, 1956;
- 5) Biot, M.A., "Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic Solid," J. Appl. Phys. Vol.27, No.5, 1956;
- 6) Biot, M.A., "Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics," J. Appl. Phys. Vol.27, No.3, 1956;
- 7) Zienkiewicz, R.S., and Wilson, E.L., "Finite-Element Analysis of Soil in Elastic Media," Proc. ASCE, J. Engr. Mech. Div. Vol.95, No. EM3, 1969;
- 8) Yokoo, Y., Yamagata, K., and Nagaoaka, H., "Finite Element Analysis of Consolidation Following Undrained Deformation," Soils and Foundations, Vol.11, No.4, Dec. 1971;
- 9) 森田, 良, 11) 木村, 万, "粘弾性圧縮に対する有限要素解析," 第21回年次学術講演会報告集, 第三部, Vol.3, No.13, 1972, 土研会;
- 10) Fung, Y.C., "固体の力学/理論," (邦訳) Chap.14, 培風館, 1970;
- 11) Zienkiewicz, M., Akgoglu, T., and Oskay, H., "Finite Element Analysis of Consolidation of Unsaturated Soil," Proc. Int. Symp. FEM. in Flow Problems, 1974.

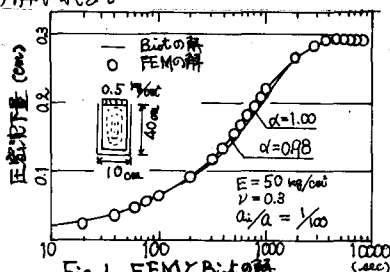


Fig.1 FEMとBiotの解

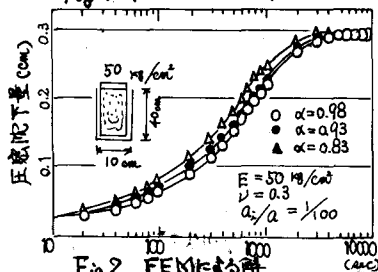


Fig.2 FEMによる解

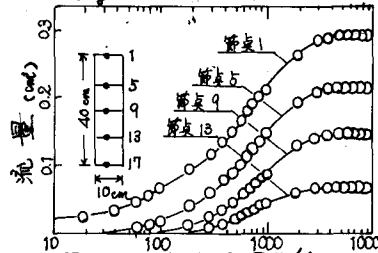


Fig.3 FEMにおける流量曲線