粒状体の内部摩擦角に関する一定理について

東北大学工学部　正員　佐武正雄

1. まえがき

粒状体の内部摩擦角を φ とすれば、

$$\sin\varphi = \mathrm{Max}\left[\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}\right] \tag{1}$$

で与えられる。ここに、3個の主応力を $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$（圧縮をプラス）とする。$\sin\varphi$ は材料に固有のものであるが、また中間主応力 σ_2 の状態によっても影響されることが知られている。いま、Lodeのパラメーターを

$$\mu = \frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3} \tag{2}$$

とすれば、φ は、$\mu = \pm 1$（軸対称応力）の場合等しい最小値をとり、その中間の状態では凸なカーブを画いて増大する（Sutherlandの実験[1]、佐武の提案式[2)3)]など）。また、Bishop[4)]や市原[5)]は平面ヒズミ状態と軸対称状態の比較の実験を行ない、前者の場合の φ は後者の場合より数%大きいことを示し、若干の考察を行なっている。本文は、降伏条件に、ある性質を仮定すれば、φ が平面ヒズミの応力状態において極大値となることを証明し、上述の性質をさらに理論的に精密化しようとするものである。

2. 内部摩擦角に関する一定理とその証明

いま、

$$p' = \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3) \tag{3}$$

$$s = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3} \tag{4}$$

とおけば、3個の主応力は、

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= p'(1+s) \\ \sigma_2 &= p'(1+\mu s) \\ \sigma_3 &= p'(1-s) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

と表わすことができ、粒状体の降伏条件は、3個の独立なスカラー量 p', s, μ を用い

$$F(p', s, \mu) = 0 \tag{6}$$

と記すことができる*。ここに、p' は応力のディメンションをもつが、s, μ はノーディメンションである。降伏曲面が原点を頂点とする錐体となる場合には、（6）式は

$$F(s, \mu) = 0 \tag{7}$$

の形をとると考えられる。文献2）、3）に提案した降伏条件式は何れもこのような場合に含まれる。（7）式を s に関して解くことができれば、$s = f(\mu)$ と記すことができ、これは（1）式の $\sin\varphi$ が中間主応力の影響を示すLodeのパラメーターによっていかに変化するかを記述するものであって、考察が容易となる。しかし、一般にこういう変形は可能でないが、（7）式における s を $\sin\varphi$ と考え、次の定理を証明することができる。

> 〔定理〕　（7）式の F を塑性ポテンシャルと考えることができれば、$\sin\varphi$ は平面ヒズミ状態において極大値をとる（ただし $\frac{\partial F}{\partial s} > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} > 0$ とする**）。

*. 通常用いられる応力の3個の不変量

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3), \quad J_2 = \frac{1}{2}\{(\sigma_1-p)^2+(\sigma_2-p)^2+(\sigma_3-p)^2\}, \quad J_3 = (\sigma_1-p)(\sigma_2-p)(\sigma_3-p)$$

は、

$$p = p'(1+\frac{1}{3}\mu s), \quad J_2 = (1+\frac{1}{3}\mu^2 s)(sp')^2, \quad J_3 = -\frac{2}{3}\mu(1-\frac{1}{9}\mu^2)(sp')^3$$

と表わされる。

**. $F(s, \mu)_{\mu=\mathrm{const}}$ は通常単調増加関数と考えられるから $\frac{\partial F}{\partial s} > 0$ である。

〔証明〕　(7) 式をμで微分し

$$\frac{ds}{d\mu}\cdot\frac{\partial F}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial\mu}=0 \qquad (8)$$

したがって、sが極値をとる条件

$$\frac{ds}{d\mu}=0 \qquad (9)$$

が成り立つための必要十分条件は（$\frac{\partial F}{\partial s}\fallingdotseq 0$ より）

$$\frac{\partial F}{\partial\mu}=0 \qquad (10)$$

である。一方、Fを塑性ポテンシャルと考えることができれば、

$$D\varepsilon_2=\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}D\lambda \qquad (11)$$

ただし、Dλは正値パラメーター，とおくことができる(ここでは、Fを$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$の関数と考えている)。しかるに、

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}=\frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial\sigma_2}+\frac{\partial F}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\sigma_2}$$

$$=\frac{2}{\sigma_1-\sigma_3}\cdot\frac{\partial F}{\partial\mu} \qquad \text{（(2)、(3) 式により）} \qquad (12)$$

となるから、(10) 式と

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}=0 \qquad \text{すなわち} \quad D\varepsilon_2=0 \qquad (13)$$

は同値となり、これは平面ヒズミの場合に他ならない。なお、

$$\frac{d^2s}{d\mu^2}<0 \qquad (14)$$

が $\frac{\partial F}{\partial s}>0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial\mu^2}>0$ の仮定より容易に得られ、極大値であることが分かる。

3．考察

Bishop[4)]は

$$\sin\varphi=\frac{\sin\varphi_0}{1-K\sqrt{1-\mu^2}} \qquad (15)$$

という実験式を提案しているが、この式は$\mu=0$の場合にsinφの極大値を与え上述の定理とは適合しない。平面ヒズミの条件は$\mu=0$ではなく、一般に複雑であり、sinφ_0に依存するものと考えられる(文献 2)に示す式もこういう性質を示している）。市原[5)]は平面ヒズミの場合のφ_pと軸対称応力の場合のφ_0との間に直線関係があることを述べている。この問題はsinφ_pとsinφ_0との関係として理論的に研究される課題であると思われる。

4．あとがき

粒状体の内部摩擦角について、従来用いられてきた降伏条件と塑性ポテンシャルの関係を用い、二三の仮定を入れて一つの定理を導いた。しかし、実際の検証については、今後の研究にまたなければならない。

参考文献

1). Sutherland,H.B.: The Influence of the Intermediate Principal Stress on the Strength of Sand, Proc.7th Int.Conf.SMFE 1 (1969),391～399

2). 佐武正雄：土の降伏条件に関する一試案とその考察,土木学会論文報告集 第189号 (1971),79～88

3). 佐武正雄：粒状体の降伏条件に関する一提案,土木学会第28回年次学術講演会講演集III－47 (1973), 91～92

4). Bishop,A.W.: The Strength of Soils as Engineering Materials,Geotech.Vol.16 No.2 (1966), 91～130

5). 市原松平・松沢 宏：平面ひずみ状態と軸対称ひずみ状態における乾燥砂のせん断特性,土木学会論文報告集 第173号 (1970),47～59