

リブ付薄板構造の応力分布

岩手大学工学部 正員 宮本 裕

1. 水平・鉛直のリブのついた薄板構造物を考える。この構造物は薄板とリブとが共同して変形や応力を負担するものと考えられる。この構造物に鉛直外力 P などが作用するときの解析法として、次のような解析法をとることにした。

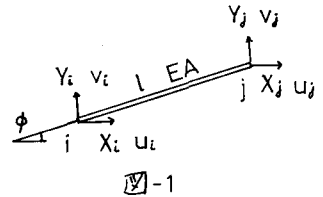
(1) せん断場理論による解析法

(2) 剛性マトリックス法による解析法

これらの解析法により本州四国連絡橋のための海中鉄構型枠について自重による変形や応力を計算した。そしてこれらの解析法を検討するため室内実験を行った。本報告においては特にリブ付薄板構造物解析の各理論の関係を説明したいと思う。

2. 解析の理論

(1) せん断場理論 薄板と強いリブを組み合わせた構造物において近似的にリブには軸力が働き、薄板にはせん断力が働くものとする。したがってリブは軸力のみ働くトラス部材と考え、薄板は一定のせん断流の働く板場と考える。(この板場をせん断場とよぶ。)



〔トラス部材の剛性マトリックス〕図-1 のようなトラス部材を考えると、部材内に貯えられるひずみエネルギー W は式(1)のようになる。

$$W = \frac{EA}{2l} \{ (u_j \cos \phi_j + v_j \sin \phi_j) - (u_i \cos \phi_i + v_i \sin \phi_i) \}^2 \quad \dots (1)$$

またカステリヤノの定理により

$$X_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}, \quad Y_i = \frac{\partial W}{\partial v_i}, \quad X_j = \frac{\partial W}{\partial u_j}, \quad Y_j = \frac{\partial W}{\partial v_j} \quad \dots (2)$$

であるから、式(1)を式(2)に代入して計算して $\cos \phi_i = \cos \phi_j = \lambda$, $\sin \phi_i = \sin \phi_j = \mu$ を考慮すると節点力 X_i, Y_i, X_j, Y_j , 節点変位 u_i, v_i, u_j, v_j の間の関係を得る。

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad \dots (3)$$

トラス部材の軸力は式(4)から計算される。

$$N = \frac{EA}{l} \{ (u_j - u_i)\lambda + (v_j - v_i)\mu \} \quad \dots (4)$$

〔せん断場の剛性マトリックス〕図-2においてせん断応力 q

一定であるからせん断ひずみも一定であって

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = C_1 \quad \dots (5)$$

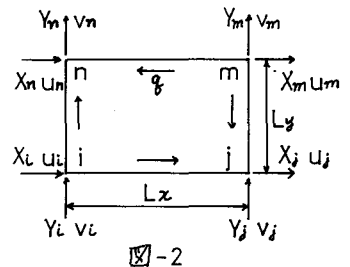
したがってせん断ひずみによるひずみエネルギーは $W = \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} G \gamma_{xy}^2 dx dy \quad \dots (6)$

となる。微分方程式(5)のほかに $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = C_2 + C_3 y$, $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = C_4 + C_5 x \quad \dots (7)$

も考えて、これらを解いて境界条件により変位 u, v を決定する。この u, v を改めて式(5)に代入すると

$$\gamma_{xy} = (u_m + u_n - u_i - u_j) \frac{1}{2L_y} + (v_m + v_j - v_i - v_n) \frac{1}{2L_x} \quad \dots (8)$$

が得られる。式(8)を式(6)に代入すればひずみエネルギー W が節点変位で表わされる。計算の便宜上 $\{u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m, u_n, v_n\} = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8\}$ とすればせん断場の剛性マトリ



ックス S_{ij} は $S_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \delta_i \partial \delta_j}$. . . (9) で計算される。結局せん断場の剛性マトリックスはつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_m \\ Y_m \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \frac{Gt}{4} \begin{bmatrix} r & 1 & r & -1 & -r & -1 & -r & 1 \\ 1 & \frac{1}{r} & 1 & -\frac{1}{r} & -1 & -\frac{1}{r} & -1 & \frac{1}{r} \\ r & 1 & r & -1 & -r & -1 & -r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{r} & -1 & \frac{1}{r} & 1 & \frac{1}{r} & 1 & -\frac{1}{r} \\ -r & -1 & -r & 1 & r & 1 & r & -1 \\ -1 & \frac{1}{r} & -1 & -\frac{1}{r} & 1 & \frac{1}{r} & 1 & -\frac{1}{r} \\ -r & -1 & -r & 1 & r & 1 & r & -1 \\ 1 & \frac{1}{r} & 1 & -\frac{1}{r} & -1 & -\frac{1}{r} & -1 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad \dots (10)$$

ここで $r = \frac{L_x}{L_y}$ とする。

せん断場のせん断流は式(11)から計算される。

$$q = \frac{Gt}{2L_z} (r u_i + v_i + r u_j - v_j - r u_m - v_m - r u_n + v_n) \quad \dots (11)$$

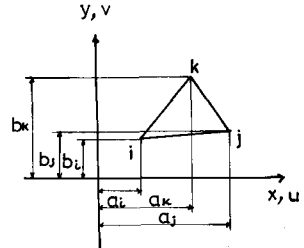


図-3

(2) 剛性マトリックス法 リアは前理論と同様に軸力のみ

働くトラス部材と考へるが、薄板は平面応力状態のシャイブと考へる。このシャイブを三角形要素の場合と矩形要素の場合についてそれぞれ剛性マトリックスを求めてみる。図-3のような三角形要素内の任意点のx方向変位をu, y方向変位をvとし $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2$, $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_5$. . . (12)

$$\left. \begin{aligned} \text{とあとに変位u, vは} \\ u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad \dots (13)$$

と求められる。ここで未定係数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ は境界条件により決定される。平面応力状態のひずみエネルギーは $W = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dF$. . . (14)

$$\text{であり応力とひずみの間の関係} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \dots (15)$$

を用いると $W = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int \{ (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_y) + \frac{1}{2}(1-\nu) \gamma_{xy}^2 \} dF$. . . (16) となる。

式(13)を式(12)に改めて代入すると $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ が求められるからこれを式(16)に代入し式(9)を用いると三角形要素の剛性マトリックスが得られる。

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_k \\ Y_k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} b_{jk}^2 + \mu a_{ij}^2 & \nu b_{jk} a_{ij} + \mu a_{ij} b_{jk} & b_{jk} b_{ki} + \mu a_{ij} a_{ki} & \nu b_{jk} a_{ki} + \mu a_{ij} b_{ki} & b_{jk} b_{ij} + \mu a_{ij} a_{ij} & \nu b_{jk} a_{ji} + \mu a_{ij} b_{ji} \\ & a_{ij}^2 + \mu b_{jk}^2 & \nu a_{ij} b_{ki} + \mu b_{jk} a_{ki} & a_{ij} a_{ki} + \mu b_{jk} b_{ki} & \nu a_{ij} b_{ij} + \mu b_{jk} a_{ij} & a_{ij} a_{ji} + \mu b_{jk} b_{ji} \\ & & b_{ki}^2 + \mu a_{ij}^2 & \nu b_{ki} a_{ij} + \mu a_{ij} b_{ki} & \nu b_{ki} a_{ji} + \mu a_{ij} b_{ji} & \nu b_{ki} a_{ji} + \mu a_{ij} b_{ji} \\ & & & a_{ki}^2 + \mu b_{jk}^2 & \nu a_{ki} b_{ij} + \mu b_{jk} a_{ij} & a_{ki} a_{ji} + \mu b_{jk} b_{ji} \\ & & & & b_{ij}^2 + \mu a_{ij}^2 & \nu b_{ij} a_{ji} + \mu a_{ij} b_{ji} \\ & & & & & a_{ji}^2 + \mu b_{jk}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

右上半分に対称

$$\text{ここで } k = \frac{E}{2(a_{ji} b_{ik} + a_{ki} b_{ij} + a_{ij} b_{ki})(1-\nu^2)} \text{ である。} \quad \dots (17)$$

ただし $b_{jk} = b_j - b_k$, $\mu = \frac{1-\nu}{2}$ とする。

つぎに矩形要素の剛性マトリックスを考へよう。図-2のような矩形要素において微分方程式は式(5), (7)となるからこれらを解いて境界条件により変位u, vを決定する。このu, vを改めて式(5), (7)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= (u_m + u_n - u_i - u_j) \frac{1}{2L_y} + (v_m + v_j - v_i - v_n) \frac{1}{2L_x} \\ \epsilon_x &= (u_j - u_i) \frac{1}{L_x} + (u_m - u_j - u_n + u_i) \frac{y}{L_x L_y} \\ \epsilon_y &= (v_n - v_i) \frac{1}{L_y} + (v_m - v_j - v_n + v_i) \frac{x}{L_x L_y} \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

となる。

式(18)を式(6)でなく式(16)に代入すれば矩形要素の剛性マトリックスが得られる。

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_m \\ Y_m \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{E}} \begin{bmatrix} 8+3\gamma^2\mu_1 & 3\gamma\mu_2 & -8+3\gamma^2\mu_1 & -3\gamma\mu_3 & -4-3\gamma^2\mu_1 & -3\gamma\mu_2 & 4-3\gamma^2\mu_1 & 3\gamma\mu_3 \\ & 8\gamma^2+3\mu_1 & 3\gamma\mu_3 & 4\gamma^2-3\mu_1 & -3\gamma\mu_2 & -4\gamma^2-3\mu_1 & -3\gamma\mu_3 & -8\gamma^2+3\mu_1 \\ & & 8+3\gamma^2\mu_1 & -3\gamma\mu_2 & 4-3\gamma^2\mu_1 & -3\gamma\mu_3 & -4-3\gamma^2\mu_1 & 3\gamma\mu_2 \\ & & & 8\gamma^2+3\mu_1 & 3\gamma\mu_3 & -8\gamma^2-3\mu_1 & 3\gamma\mu_2 & -4\gamma^2-3\mu_1 \\ & & & & 8+3\gamma^2\mu_1 & 3\gamma\mu_2 & -8+3\gamma^2\mu_1 & -3\gamma\mu_3 \\ & & & & & 8\gamma^2+3\mu_1 & 3\gamma\mu_3 & 4\gamma^2-3\mu_1 \\ & & & & & & 8+3\gamma^2\mu_1 & -3\gamma\mu_2 \\ & & & & & & & 8\gamma^2+3\mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

右上半分に対称

ここで $\underline{\underline{E}} = \frac{Et}{24(1+\nu)r}$, $\gamma = \frac{L_x}{L_y}$, $\mu_1 = 1-\nu$, $\mu_2 = 1+\nu$, $\mu_3 = 1-3\nu$... (19)

3. 数値計算例

本州四国連絡橋Dルート(児島一坂出間)北・南端護岸大橋橋脚6Pおよび橋台7Aの基礎剛体の海中鉄構型枠についての設計例にもとづいて計算したところ図-4のようになった。この図にはパネル梁の軸力と変位図があらわされてある。せん断場理論による計算値と剛性マトリックス法による計算値とをならべて描いた。かゝる中では剛性マトリックス法によるもので()は三角形要素を, []は矩形要素を用いた結果である。柱の断面積は 307.2 cm^2 , パネル梁の断面積は 133.2 cm^2 である。薄板の厚さは 1 cm である。自重については1枚の壁体に $7,500 \text{ kg}$ が働くものとし, $7,500 \times \frac{1}{48} = 156.25 \text{ kg}$ が1つの格点に働くものとした。

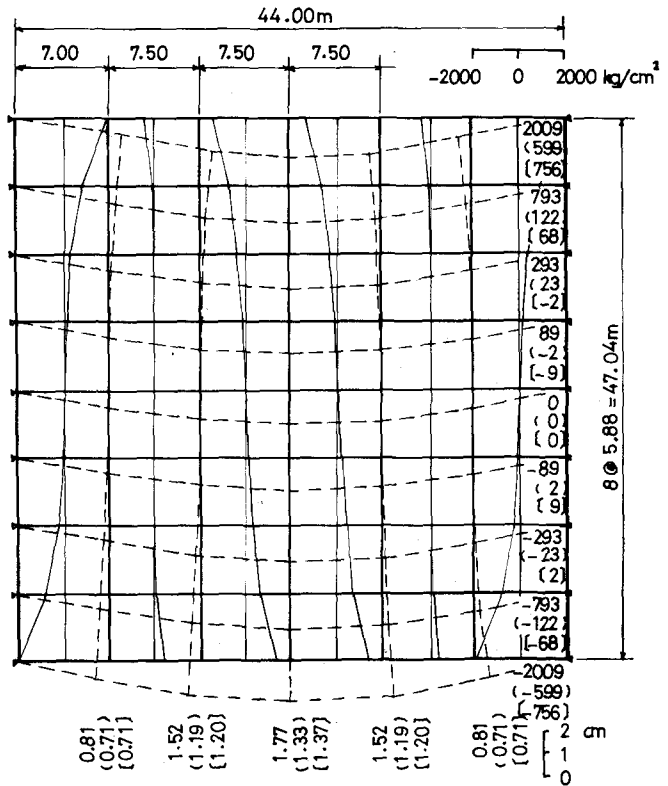


図-4

終りに本研究をすすめるに際し

北大工学部渡辺昇教授に非常にお世話になったことを感謝する。