ウェイト・マトリックスの板の反力解析への応用とその考察

東北大工学部　正　員　佐武正雄
東北大工学部　正　員　新関　茂
東北大工学部　学生員　○聖生守雄

1．まえがき

有限要素法による連続体の応力解析では、通常、個々の要素に対して導かれた応力マトリックスが用いられているが、個々の要素ごとに応力を求めるので、一般にこの方法では、要素の境界上で応力場が不連続となることや、変位に比較して応力の精度が低いなどの欠点が指摘されている。著者らは、ウェイト・マトリックスを用い節点力（集中力）を仕事量に関して等価な分布力に置換することにより、連続な応力場を求める方法を提案した[1]。本文では、このような方法により、板の反力を解析する方法を説明し、従来の応力マトリックスによる方法や、級数解と比較し、考察を行なったものである。

2．ウェイト・マトリックスの誘導[1]

節点における分布力の値をp^i、また集中力の値をP_iとすれば、p^iからP_iへの仕事量に関して等価な置換は、

$$P_i = W_{ij}\, p^j \tag{1}$$

と表わされる。ここに、W_{ij}は仮想仕事の原理より、

$$W_{ij} = \int_R \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\, dR \tag{2}$$

で与えられる。$\varphi_i(x)$は、変位の補間関数であり、Rは$\varphi_i(x)$の定義領域である。

また、逆に、集中力P_iから分布力p^iへの等価置換は、W_{ij}の逆マトリックスW^{ij}を用い、

$$p^i = W^{ij} P_j \tag{3}$$

によって行なうことができる。今、$\varphi_i(x)$を、

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1(\xi) = -\xi + 1 && (0 \leqq \xi \leqq 1)\\
&\varphi_i(\xi) = \xi - i + 2 + 2(-\xi + i - 1)H(\xi - i + 1) && (i-2 \leqq \xi \leqq i)\\
&\varphi_{N+1}(\xi) = \xi - N + 1 && (N-1 \leqq \xi \leqq N)\\
&\varphi_i(\xi) = 0 && (\text{上の定義域以外の領域})
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ここで、Nは分割数、$\xi = x/h$（hは要素長）、$H(x)$は unit step function

とすれば、$N=4$の場合、ウェイト・マトリックスW^{ij}は次のようになる。

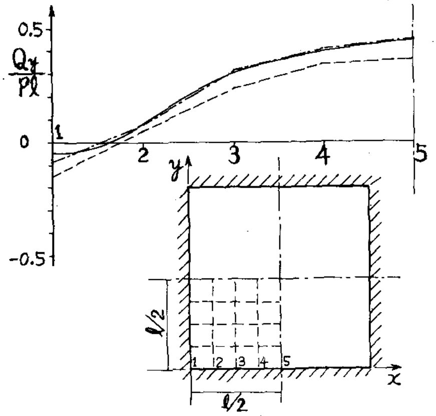
$$W^{ij} = \frac{1}{28h}\begin{pmatrix} 97 & & & \text{Sym.} & \\ -26 & 52 & & & \\ 7 & -14 & 49 & & \\ -2 & 4 & -14 & 52 & \\ 1 & -2 & 7 & -26 & 97 \end{pmatrix} \tag{5}$$

3．ウェイト・マトリックスの板の反力解析への応用

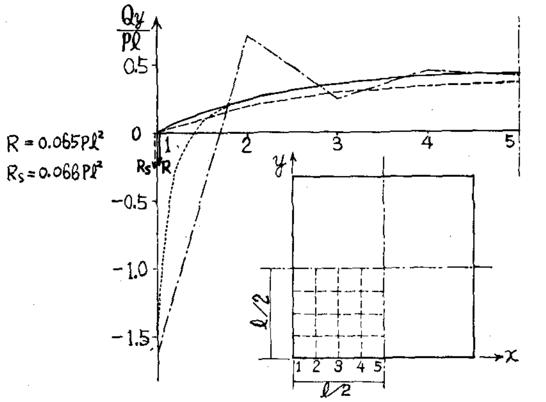
ウェイト・マトリックスの応用例として、単純支持板と固定板の周辺上に分布している反力を解析する。有限要素法による板の解析では、力はすべて節点を通じて伝達されるものと仮定している。板の境界上の反力（節点力）は、変形量とスティフネス・マトリックスを用いて容易に求めることができる。このようにして求められた節点反力 P_i からウェイト・マトリックス（５）を用いて、仕事量に関して等価な分布反力 p^i を求めることができる。図－１，図－２は、それぞれ等分布荷重Pを受ける単純支持板、及び固定板の周辺上の反力をこの方法で求め、種々の方法を用いて計算した結果と比較したものである。計算に用いた有限要素モデルは、非適合な変位関数を用い、薄板の理論によって定式化したものである。[2] なお、薄板理論による級数解と、応力マトリックスによる数値解では、反力として換算せん断力を用いている。

—·—·—·— ウェイトマトリックス　　———— 薄板理論による級数解

－－－－－ 応力マトリックス　　・・・・・・ Reissner理論による級数解[3]



図－１　固定板の反力分布



図－２　単純支持板の反力分布

4．考察

固定板の周辺上の反力は、応力マトリックスによる方法に比較し、ウェイト・マトリックスによって求められた値は、薄板の理論による級数解に非常によい近似を示している。

単純支持板の場合、ウェイト・マトリックスによる計算値は、辺の中央部では薄板の理論による級数解に非常によく近似しているが、板の隅付近では、むしろReissnerの理論（板のより厳密な理論で、せん断変形の影響を考慮したもの）による解[3]に近い値となっている。Reissner理論[4]によれば、基礎方程式は

$$D\Delta\Delta w = p - \frac{t^2}{10}\frac{2-\nu}{1-\nu}\Delta p \qquad (6)$$

であり、Dは平板の曲げ剛性、tは板厚、ν はポアソン比である。また、せん断力は、

$$\left.\begin{aligned} Q_x - \frac{t^2}{10}\Delta Q_x &= -D\frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} - \frac{t^2}{10(1-\nu)}\frac{\partial p}{\partial x} \\ Q_y - \frac{t^2}{10}\Delta Q_y &= -D\frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} - \frac{t^2}{10(1-\nu)}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

となる。この例題では、荷重は等分布であり、変位関数は x，y 方向に対し、それぞれ三次関数であるから、上記の式は薄板の理論による基礎方程式、及び、せん断力を求める式と差異がないことになる。また、ウェイト・マトリックスによる方法では、換算せん断力の概念を用いずに、集中反力から分布反力を求めている。計算に薄板の理論を用いているにもかかわらず、Reissner理論による解に、むしろ近似した解が得られたのは、このよ

うな事実も一つの理由となっているのではないかと思われる。ウェイト・マトリックスによる分布反力は波状となるが、これは、反力の急激な変化を直線近似するために生じるものと思われる。

一般に、ウェイト・マトリックスによる方法は、図－１、図－２にみられるように、反力の変化の少ない領域では、よい近似を示すようである。また、単純支持板の隅付近のような反力が急激に変化する領域では、ウェイト・マトリックスによって求めた反力分布は波状となる。

本文で用いた補間関数 $\varphi_i(x)$ は一次関数であるが、さらに高次の補間関数を用いることもできる。たとえば、分布力の微係数も近似することのできる三次の補間関数から導かれるウェイト・マトリックスを用いた場合、求められる分布反力は、一次の補間関数の場合より、振幅が大きく刻みの多い波状の近似となる。したがって、この場合、三次の補間関数を用いることは、適当でないように思われる。

5、あとがき

通常の応力マトリックスによる方法では、応力場は不連続となり、conjugate projection の理論[5]などを用いて平均化する必要があるが、ウェイト・マトリックスによる方法では、連続な応力場を得ることができる。また、精度の点からみても、ウェイト・マトリックスによる方法は、反力が急激に変化する領域では波状となるが、概して、応力マトリックスによる方法に比較すると、実際の反力分布のよい近似を示しているように思われる。

参考文献

1) Niiseki, S. and Satake, M.: Some Applications of Topological Consideration and Weight-Matrix Method to Finite Element Analysis, in Y. Yamada and R. H. Gallagher (eds.); "Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis", Proceedings of the 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis, University of Tokyo Press, 1973, PP.61-73

2) Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method in Engineering Science, MacGraw-Hill, 1971, PP.177-184

3) Kromm, A.: Über die Randquerkräfte bei gestützten Platten, Z. angew, Math. Mech., vol.35 1955, PP.231-242

4) Reissner, E.: The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, J. Appl. Mechanics, vol.12, 1945, PP.A69-77

5) Oden, J. T.: Finite Elements of Nonlinear Continua, MacGraw-Hill, 1972, PP.54-92

6) Timoshenko, S.: Theory of Plates and Shells, MacGraw-Hill, 1959,