宮城県内の水資源について

東北大学工学部　正員　坂本龍雄
〃　学生員　○板橋勝一郎
〃　学生員　中村隆幸
〃　学生員　西田吉男

1．まえがき

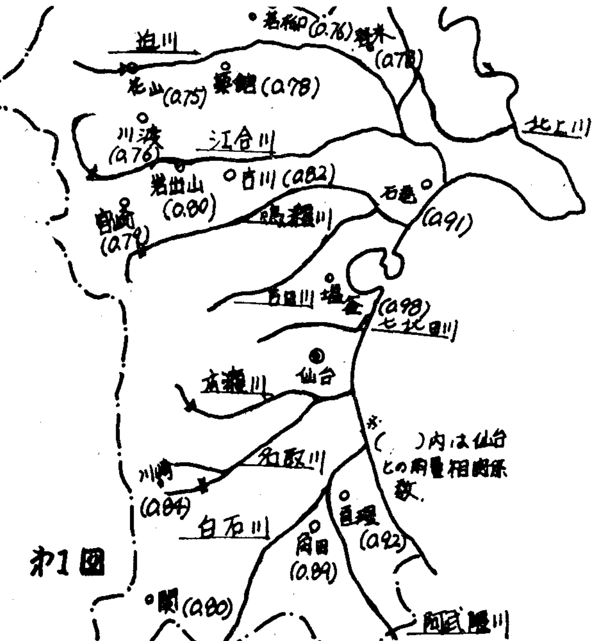
仙台及びその周辺地域の水需要は、給水需要を中心として，人口増加並びに生活水準の向上等に伴い，増加の一途をたどっている。建設省河川局編による「広域利水調査第一次報告書」によれば，昭和60年度の仙台湾地域の年間総需要量は、3.13億m³/年，供給量は2.40億m³/年と見込まれ，0.73億m³/年の不足が生じるものとされている。現在に到るまでの仙台湾地域の水供給は、上水道，工業用水ともに、そのすべてを名取川水系（広瀬川を含む）に依存していると見なしてさしつかえなく，その経済的開発はすでに最終段階にさしかかろうとしている。特定地域の水需要急増に対処する水資源計画として通常とりうる立場は次の2つが考えられる。(1)従来の水供給源の利用高度化。(2)他の供給過剰地域からの導水。

前者は、流量の時間的平均化をさらにおし進めることで、名取川水系の利用高度化に相当する。

後者は、水の地域的平均化の考え方であって県内の他河川へ新水源を求めることに相当し、白石川においてはすでに具体化が始められている。

本研究では，後者の立場に立ち県内の主要河川についてそれらの間の相互関係を、流量及び流域雨量の相関係数と成因分析によってとらえ，水資源の地域的相互関係の概要をとらえようと試みた。

また貯水池を使って各河川を開発する場合，貯水量の時系列を単純マルコフ連鎖と見なして，その推移確率行列から貯水池の定常的渇水確率を求め供給水の信頼性の評価を試みたものである。



第1図

2．成因分析

いくつかの水文量相互の関係を評価するために，観測値の全変動に占める共通因子の数及び割合を推定するには，成因分析の手法が有効である。p種の変量を持つn個の観測値行列をXとし，各成分x_{ij}はすべての行に関して次のように標準化されているものとする。

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \cdots & & \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \quad \cdots (1) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=0,\ \sum_{j=1}^{n}\frac{x_{ij}^2}{n}=1 \quad \cdots (2)$$

また第 i 行と第 i' 行との標本相関係数は，(2)の条件のもとでは標本共分散に等しく

$r_{ii'} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{ij} \cdot x_{i'j}}{n}$　$(i, i' = 1, 2, \cdots P)$　で示され，これを成分とする標本相関行列を $\mathbb{R}$ とする。
これに対する因子行列を $\mathbb{Y}$ とし因子行列の各列は P 種の変量の一次結合で示されると仮定すれば，(4) 式が得られる。$\mathbb{A}$ は $P \times P$ 係数行列，x_j は観測値行列 $\mathbb{X}$ の列ベクトルである。

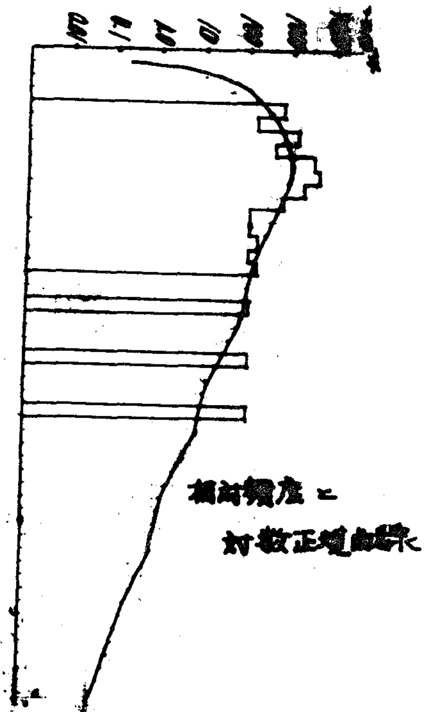
$$\mathbb{Y} = [y_1, y_2, \cdots y_n] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{p1} & y_{p2} & \cdots & y_{pn} \end{bmatrix} \cdots (3) \qquad y_j = \mathbb{A} \cdot x_j \quad (j = 1 \cdots n) \cdots (4)$$

ゆえに　$\mathbb{Y} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$　となり，成因分析は因子ベクトル y_j の次元数 P を g $(g \leq P)$ 次の独立な因子で表現されるように係数行列 $\mathbb{A}$ の行ベクトルを互いに直交するように求めれば達成される。$\mathbb{A}$ は，相関行列の固有方程式　$|\mathbb{R} - \lambda \mathbb{I}| = 0$ ……(5)

を解いて得られる P 個の固有値を，大きい順に $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ とし，対応する固有ベクトルを $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2 \cdots \mathbb{L}_p$ とすれば(6)式で求められる。

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_1^T \\ \mathbb{L}_2^T \\ \vdots \\ \mathbb{L}_p^T \end{bmatrix} \cdots (6)$$

第 i 因子は，因子行列の第 i 行 $\mathbb{Y}_i = \mathbb{L}_i^T \cdot \mathbb{X}$ で示され，その因子が全変動中に占める割合を計算するには λ_i / P を求めれば良い。第一因子は特に主成因子と呼ばれる。



成因分析の結果の一例として，県内各地の18雨量観測所の日雨量系列，及び第一図に示す主要河川の流量観測所の日流量系列を用いた結果を第2図に示す。図から分るように雨量，流量とも主成因子によって全変量のほぼ80%が説明されており　この例以外の計算結果（旬，月，年単位の量による）でもほぼ同様の結果が得られた。言い換えれば，宮城県内各地に降雨をもたらし，各河川の流量を増減せしめる原因は，ほぼ共通のものということであり，ある地域で渇水が生じたときは他の地点でも同時に渇水が生じており，他水系からの導水にはあまり適していないことが分る。
第1図には，仙台を中心とした各雨量観測所の相関係数が記入してあるが，おおむね0.8～0.9以上の高い値を示していることでも，この傾向が裏付けられる。

3，貯水池における貯水量の確率的変化と渇水確率

従来の利水計画は，過去10年程度の流況を対象としその第一位又は第2位の渇水流況を基準渇水年として選び，その流況に対して補給が出来れば良いとする方式が普通であったが，流入量の不確定性を積極的に取り入れたモデルの開発が近年急速に進められている。その一つとして，ここでは貯水池系がランダム（独立）な流入量を受け，貯水量系列が単純マルコフ連鎖を形成するものと仮定し，

貯水量の状態推移確率から，ある規定放流量に対する経年的渇水確率の計算を試みた。

(i) 流量系列のランダム化と確率分布

i年j月の半旬流量系列Q_{ij}^{k} ($k=1,2,\cdots 6$) がその月の平均半旬流量$\overline{Q_{ij}}$のまわりに変動するものとし，$\overline{Q_{ij}}$との偏差はStochasticな性質を有するものと仮定する。この仮定のもとで貯水池への入力を，$X=(Q_{ij}^{k}-\overline{Q_{ij}})/\overline{Q_{ij}}+1=Q_{ij}^{k}/\overline{Q_{ij}}$ なる量とすればXは，ほぼランダム量と見なすことが出来る。Xの分布形としては，他の水文量の場合と同様に，対数正規曲線が最も良く合うようであり，各月ごとにXの頻度分布より対数正規曲線をあてはめた。その一例として第　図に吉田川落合地点の10年間の流量資料を用いた2月の頻度分布及び対数正規曲線が示してある。

(ii) 貯水量の推移確率及び定常渇水確率

放流量及び貯水量の上限を示す貯水池容量は種々の値を仮定し，貯水池の操作法としては，貯水量が規定放流量よりも大きい場合には，規定放流量だけ放流するものとし，規定放流量よりも小さい場合には次の2種類の操作法を考える。

(A) 全く放流しない。(B)貯水量を全部放流する。

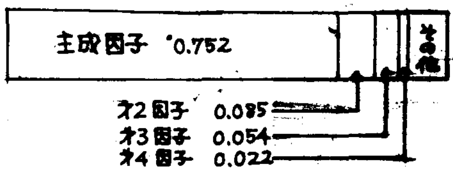
この方式のもとで第i番目の期間の流入量をR_i，規定放流量M，貯水池容量K，及びR_iが流入する前の時点における貯水量をV_iとすれば，第$(i+1)$期間の初期貯水量V_{i+1}はそれぞれ次式であらわされる。

$$\text{(A)}\quad \left.\begin{array}{ll} V_{i+1}=\mathrm{Min}(K,V_i+R_i)-M & (V_i+R_i\geqq M) \\ V_{i+1}=V_i+R_i & (V_i+R_i<M) \end{array}\right\}\quad(7)$$

$$\text{(B)}\quad V_{i+1}=\mathrm{Min}(K,V_i+R_i)-\mathrm{Min}(M,V_i+R_i)\cdots(8)$$

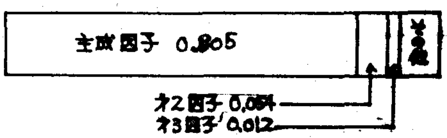
上式からも，貯水量が単純マルコフ連鎖を形成することが分る。ゆえに(i)で求めたR_iの各月の確率分布，及び(7)，(8)式を用いて貯水量の推移確率行列を定めることが出来る。単位流量をΔV (m³/sec) とし，水量は全てΔVの整数倍の離散値をとるものとし ($R_i=r\cdot\Delta V$, $M=m\cdot\Delta V$, $K=k\cdot\Delta V$, $V_i=v\cdot\Delta V$)，流入量の確率分布も離散的に $P_r[R_i=j\cdot\Delta V]=P(j)$ ($j=1\cdots n$) とあらわせば(A)，(B)に対する推移確率行列はそれぞれ次式となる。

• 宮城県内18雨量観測所データによる成因分析（日雨量）



観測所名　塩釜、鳴瀬、筆甫、吉大神
新鳴子、長老沢、刈田、円田、仙台沼
角田、川渡、曽子、花山、鶴崎、石巻
仙台、亘理、古川

県内5流量観測所による成因分析



観測所名　三本木橋　落合
鹿島、大河原　大倉

第2図

$$\text{(A)}\begin{bmatrix} P(M) & P(1)+P(M+1) & P(2)+P(M+2)\cdots & P(M-1)\cdot & P(2M) & P(2M+1) & \cdots\cdots & P(K-1) & \sum_{I=K}^{N}P(I) \\ P(M-1) & P(M) & P(1)+P(M+1)\cdots & \begin{array}{c}P(M-2)\\+P(M+(M-2))\end{array} & P(2M-1) & P(2M) & \cdots\cdots & P(K-2) & \sum_{I=K-1}^{N}P(I) \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & P(M-1) & \sum_{I=M}^{N}P(I) \end{bmatrix}$$

$$\text{(B)}\begin{bmatrix} \sum_{I=1}^{M}P(I) & P(M+1) & P(M+2) & \cdots\cdots & P(K-1) & \sum_{I=K}^{N}P(I) \\ \sum_{I=1}^{M-1}P(I) & P(M) & P(M+1) & \cdots & P(K-2) & \sum_{I=K-1}^{N}P(I) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & P(M-1) & \sum_{I=M}^{N}P(I) \end{bmatrix}$$

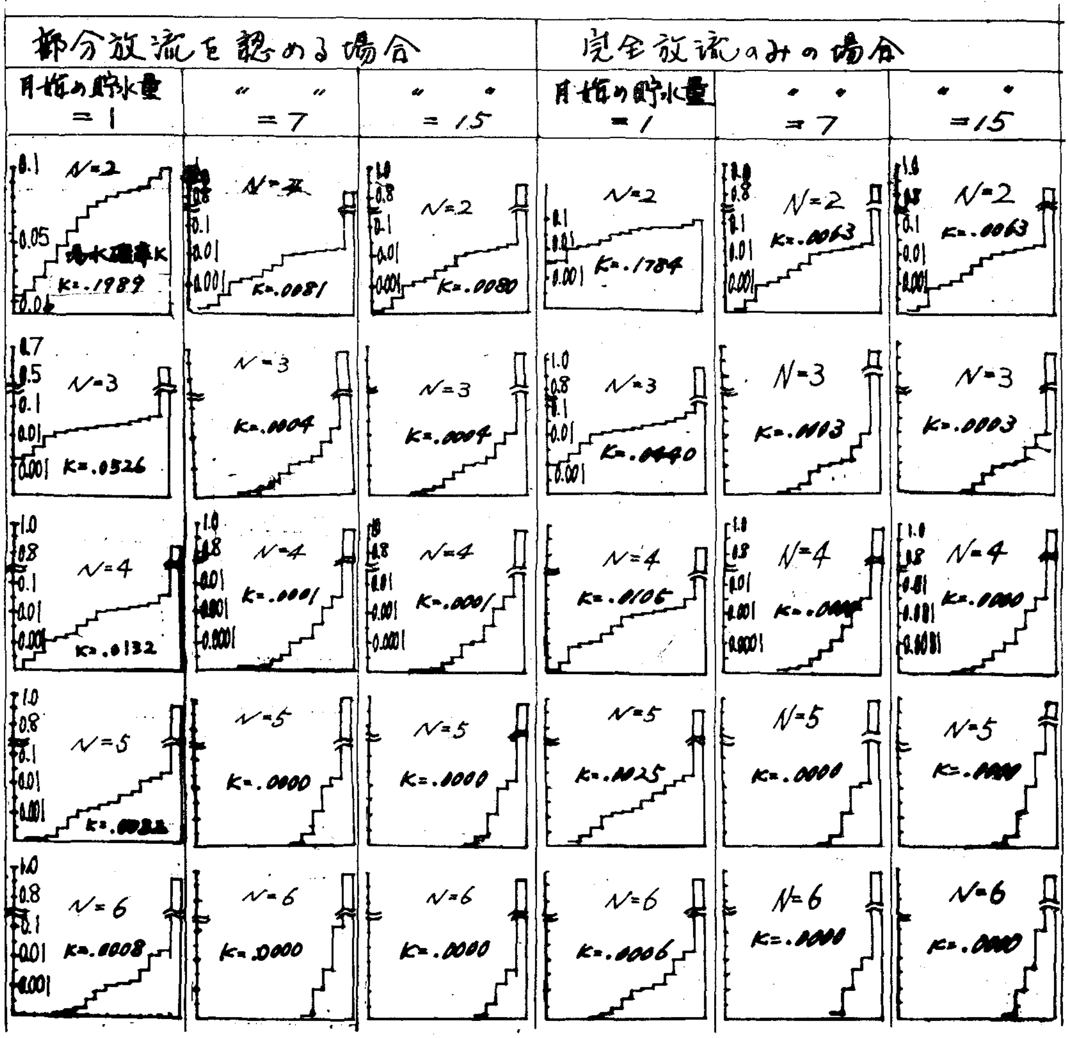
マルコフ連鎖の性質として，第S月の任意時点nの貯水量の状態確率$\mathbb{P}_n$は，第S月の初期確率ベクトル$\mathbb{P}_0^{(S)}$，及び推移確率行列$\mathbb{P}_S$のn回のベクトル積$\mathbb{P}_S^n$の積として与えられる。また

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_0^{(S)} \cdot \mathbb{P}_S^n \quad (n=1,2\cdots\cdots6) \qquad \cdots\cdots \quad (9)$$

第S月の初めを出発点とした1年後の同じ時点に到る推移行列を$\mathbb{P}_{(S)}$であらわせば，N年後の状態確率$\mathbb{P}_N$は(10)式で示され，$N\to\infty$の場合の極限状態ベクトル，すなわち第S月の初期貯水量の定常分

$$\mathbb{P}_N = \mathbb{P}_0^{(S)}\{\mathbb{P}_{(S)}\}^N, \quad \mathbb{P}_{(S)} = \mathbb{P}_S^6 \cdot \mathbb{P}_{S+1}^6 \cdots \mathbb{P}_{12}^6 \cdot \mathbb{P}_1^6 \cdots\cdots \mathbb{P}_{S-1}^6 \quad \cdots (10) \qquad \omega^{(S)} = \omega^{(S)} \cdot \mathbb{P}_{(S)} \cdots (11)$$

布は(11)式を満足する$\omega^{(S)}$で与えられる。$\omega^{(S)}$の成分を$\omega_1\ \omega_2 \cdots\cdots \omega_{k-m}$とすると，定常的渇水確率は$\sum_{i=1}^{m-1}\omega_i$で求められる。以下に2月の計算結果を示す。その他の詳細な結果は講演時に報告する。



《参考文献》(1) 室田　明・貯水池による水供給の信頼性 I, II, III,（年次講演論文集 69.70.71）
(2) 長尾正志・貯水池を持つ河川の渇水確率について（京大防災研年報）