有限要素法による粘性流れの中におかれた物体の応答解析

秋田大学　正　薄木征三
秋田大学　学　○工藤研二
秋田大学　学　今野隆一

1、まえがき

粘性流れの有限要素法による数値解析は，その定式過程や数値計算法にしても他の非構造分野に比べ十分に体系化されているとは言えず，発展途上にある領域である。本報告は粘性流れの中におかれた物体の動的応答，すなわち流体と物体との連成振動に関して有限要素法による定式化を試みんとするものである。この方面の先駆的な研究として Zienkiewicz[1] や Tong[2] らのものがあるが，これらはいずれも流体の大部分は静止している接水振動を扱ったものであり，従って粘性は主要なファクターとはならず非粘性のポテンシャル流として解かれている。

定式過程は，先に著者らの応用した[3] local potential の概念に基づく．

2. 流体力学における変分原理

非圧縮性粘性流体の基本方程式は

$$0 = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \qquad \cdots\cdots (1)$$

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad \cdots\cdots (2)$$

ここに ϕ は単位質量あたりのポテンシャルである。式(1)に $-\delta(p+\rho\phi)$，式(2)に $-\delta u_i$ をおのおの乗じ加えれば

$$-\int_V \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\delta u_i dV = \int_V \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta u_i dV + \int_V \frac{\partial (p+\rho\phi)}{\partial x_i}\delta u_i dV - \int_V \delta(p+\rho\phi)\frac{\partial u_j}{\partial x_j}dV - \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i dV \quad \cdots (3)$$

ここで Gauss の定理を用い面積積分に変換すれば

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\frac{\delta u_i \delta u_i}{2}dV = \delta\left\{\int_V\left(\rho\frac{\partial u_i^0}{\partial t}u_i + \rho u_j^0\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}u_i - (p+\rho\phi)^0\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - (p+\rho\phi)\frac{\partial u_j^0}{\partial x_j} + \tau_{ij}^0\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)dV + \int_A\left((p+\rho\phi)^0 u_j - \tau_{ij}^0 u_i\right)n_j dA\right\} = \delta F \quad \cdots (4)$$

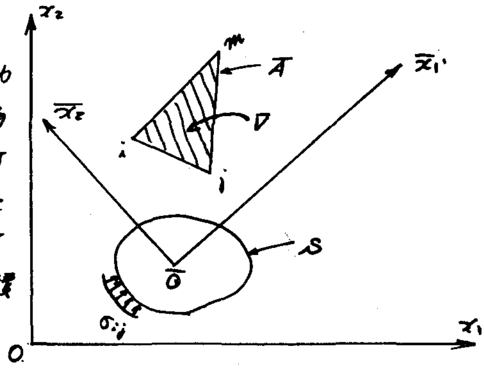
Fの内容は異なるが，左辺は Lemieux[4] らの導びいたものと同じである。それゆえ $u_i = u_i^0$，$p = p^0$ のとき，Fは最小となる事情はかわらない。なお，式(4)の体積積分内の3，4項は

$$-\delta\left\{(p+\rho\phi)\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right\} = -\delta(p+\rho\phi)\frac{\partial u_j^0}{\partial x_j} - (p+\rho\phi)^0\delta\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

であるから，体積変化によるエネルギーを表わす。式(4)から逆に $\delta F/\delta u_i = 0$，$\delta F/\delta p = 0$ を計算すれば式(2)と式(1)が導びかれる。この意味において式(4)の汎関数 F は Lemieux

らの導びうたものより，より完全な形のものである。

3. 動座標系への変換



右図で（x_1, x_2）を静止座標系，（$\bar{x}_1, \bar{x}_2$）を運動する物体Sに固定された動座標とする。この時，物体Sのまわりの流れ場を有限要素（i−j−m）で分割する。（i−j−m）は動座標系に対して固定されているとする。式（4）の汎関数Fの各項はエネルギー，すなわちスカラー量であるから，どのような座標系で積分しても値を変えない。

式（4）の速度を動座標系の量で表わすと

$$u_i = u_{i0} + u_j' \alpha_{ji} \qquad \cdots\cdots (5)$$

ここにu_{i0}は動座標の原点$\bar{O}$の速度，α_{ji}は$\bar{x}_j$軸とx_i軸のなす角の方向余弦であり，u_j'は例えば2次元問題の場合

$$u_1' = \bar{u}_1 - \omega \bar{x}_2 \quad , \quad u_2' = \bar{u}_2 + \omega \bar{x}_1 \qquad \cdots\cdots (6)$$

であり，ここに$\bar{u}_i$は動座標系からみた流体の速度，ωは紙面に直角な$\bar{x}_3$軸の角速度である。式（4）の各項を動座標系の量で表わすと

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial u_i}{\partial t} = \dfrac{\partial u_{i0}}{\partial t} + \dfrac{\partial u_j'}{\partial t}\alpha_{ji} + u_j'\dfrac{\partial \alpha_{ji}}{\partial t}, & \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_i} \ (\text{不变量}) \\
\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial u_r'}{\partial \bar{x}_m}\alpha_{ri}\alpha_{mj} & , \quad n_i = \alpha_{ji}\cdot \bar{n}_j \\
\tau_{ij} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\bar{\tau}_{mn} & , \quad \bar{x}_i = (x_j - y_j)\alpha_{ij}
\end{array}\right\} \cdots\cdots (7)$$

式（7）でy_iはx_i方向の原点$\bar{O}$の変位量である。p, ϕはスカラーであるから不変である。式（7）を式（4）に代入すれば

$$\begin{aligned}
F = \int_{\bar{V}} \Big\{ & \rho\Big(\frac{\partial u_{i0}}{\partial t} + \frac{\partial u_j^{\circ\prime}}{\partial t}\alpha_{ji} + u_j^{\circ\prime}\frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial t}\Big)(u_{i0} + u_j'\alpha_{ji}) + \rho(u_{j0} + u_m^{\circ\prime}\alpha_{mj})(u_{i0} + u_n'\alpha_{ni})\,\alpha_{ri}\alpha_{nj}\frac{\partial u_r^{\circ\prime}}{\partial \bar{x}_n} \\
& - (p+\rho\phi)^{\circ}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} - (p+\rho\phi)\frac{\partial \bar{u}_j^{\circ}}{\partial \bar{x}_j} + \alpha_{mi}\alpha_{nj}\alpha_{ri}\alpha_{sj}\bar{\tau}_{mn}^{\bullet}\frac{\partial u_r'}{\partial \bar{x}_s} \Big\} d\bar{V} \\
& + \int_{\bar{A}} \Big((p+\rho\phi)^{\circ}(u_{j0} + u_r'\alpha_{ri}) - \alpha_{mi}\alpha_{nj}\bar{\tau}_{mn}^{\circ}(u_{i0} + u_r'\alpha_{ri})\alpha_{sj}\bar{n}_s \Big\} d\bar{A} \qquad \text{——} (8)
\end{aligned}$$

4. 有限要素法による定式化

図−1の要素（i−j−m）内の相対流速$\bar{u}_i$を

$$\bar{u}_i = \psi^N(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)\bar{V}_{Ni} \qquad \cdots\cdots (9)$$

圧力pを

$$p = \varphi^N(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)\,p_{Ni} \qquad \cdots\cdots (10)$$

で近似する。ψ ，φ はそれぞれ形状関数であり既知である。式(9)，(10)を(8)に代入し $\delta F/\delta \bar{v}_{Ni}=0$ ，$\delta F/\delta p_{Ni}=0$ を行えば，それぞれ運動方程式と連続の式が得られるが，ここでは行列表示による誘導を試みる。式(5)は行列では

$$\{u\}=\{u_0\}+[A]^T\{\bar{u}\}+\omega[A]^T\{\bar{x}\} \qquad \cdots\cdots (11)$$

と表わせる。ここに例えば2次元流の場合

$$\{\bar{x}\}=\begin{Bmatrix}-\bar{x}_2\\ \bar{x}_1\end{Bmatrix}, \quad [A]=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \cdots (12)$$

であり，θ は $\bar{x}_1$ 軸と x_1 軸のなす角度である。$[A]$ は直交マトリックスであり，$[A]^T=[A]^{-1}$ の性質がある。式(11)，(12)の関係を用いれば式(8)は次のようになる。

$$\begin{aligned}F=&\int_{\bar{V}}\Big\{(\{u_0\}^T+\{\bar{u}\}^T[A]+\omega\{\bar{x}\}^T[A])(\{\dot{u}_0\}+[\dot{A}]^T\{\bar{u}^0\}+[A]^T\{\dot{\bar{u}}^0\}+\dot{\omega}[A]^T\{\bar{x}\}+\omega[\dot{A}]^T\{\bar{x}\})\\
&+\rho(\{u_0\}^T[A]^T+\{\bar{u}\}^T+\omega\{\bar{x}\}^T)\Big(\sum_i\frac{\partial\{\bar{u}^0\}}{\partial\bar{x}_i}[I_i]+\omega[H]\Big)([A]\{u_0\}+\{\bar{u}^0\}+\omega\{\bar{x}\})\\
&-(p+\rho\phi)^0\{\bar{e}\}^T\{J\}-(p+\rho\phi)\{\bar{e}^0\}^T\{J\}+\{\bar{e}\}^T[F]^T[E]\{\bar{\tau}^0\}\Big\}d\bar{V}\\
&+\int_{\bar{A}}\Big\{(\{u_0\}^T+\{\bar{u}\}^T[A]+\omega\{\bar{x}\}^T[A])((p+\rho\phi)^0[A]^T\{\bar{n}\}-[\bar{S}][E]\{\bar{\tau}\})d\bar{A}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots (13)$$

ここに2次元流れの場合について示すと

$$[I_1]=[1 \quad 0], \quad [I_2]=[0 \quad 1], \quad \{J\}=\{1 \quad 1 \quad 0\}^T$$

$$[H]=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad [F]=\begin{bmatrix}\alpha_{11}^2 & \alpha_{21}^2 & \alpha_{11}\alpha_{21}\\ \alpha_{12}^2 & \alpha_{22}^2 & \alpha_{12}\alpha_{22}\\ 2\alpha_{11}\alpha_{12} & 2\alpha_{21}\alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{12}\alpha_{21}\end{bmatrix}$$

$$[E]=\begin{bmatrix}\alpha_{11}^2 & \alpha_{21}^2 & 2\alpha_{11}\alpha_{21}\\ \alpha_{12}^2 & \alpha_{22}^2 & 2\alpha_{12}\alpha_{22}\\ \alpha_{11}\alpha_{12} & \alpha_{21}\alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{21}\alpha_{12}\end{bmatrix}, \quad [S]=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\bar{n}_1+\alpha_{21}\bar{n}_2 & 0 & \alpha_{12}\bar{n}_1+\alpha_{22}\bar{n}_2\\ 0 & \alpha_{12}\bar{n}_1+\alpha_{22}\bar{n}_2 & \alpha_{11}\bar{n}_1+\alpha_{21}\bar{n}_2\end{bmatrix}$$

また

$$\{\bar{e}\}=\begin{Bmatrix}\partial\bar{u}_1/\partial\bar{x}_1\\ \partial\bar{u}_2/\partial\bar{x}_2\\ \partial\bar{u}_2/\partial\bar{x}_1+\partial\bar{u}_1/\partial\bar{x}_2\end{Bmatrix}, \quad \{\bar{\tau}\}=\begin{Bmatrix}\bar{\tau}_{11}\\ \bar{\tau}_{22}\\ \bar{\tau}_{12}\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots (14)$$

である。すなわち $\{\bar{e}\}$ は相対歪速度，$\{\bar{\tau}\}$ は相対粘性応力である。式(9)，(10)を行列でかくと

$$\{\bar{u}\}=[N]\{\bar{v}\} \qquad \cdots\cdots (15)$$

$$p=[C]\{p\} \qquad \cdots\cdots (16)$$

である。式(15)，(16)を式(13)に代入する。次に $\delta F/\delta\{\bar{v}\}=0$ ，$\delta F/\delta\{p\}=0$ を行う。このとき $\{u_0\}$，ω，$[A]$ などはパラメーターとみなし変分には従わぬことに注意する。付帯条件 $\{\bar{v}^0\}=\{\bar{v}\}$，$\{p^0\}=\{p\}$ のもとに次式が得られる。ただし $[B]$ は $\{\bar{e}\}=[B]\{\bar{v}\}$ より定まるもの。

$$\int_{\bar{V}}\rho[N]^T[N]d\bar{V}\cdot\{\dot{\bar{v}}\}+\int_{\bar{V}}\rho[N]^T\Big(\sum_i\frac{\partial[N]}{\partial\bar{x}_i}\{v\}[I_i]\Big)[N]d\bar{V}\cdot\{\bar{v}\}$$

$$+\int_{\bar{V}}\Big(\rho[N]^T\sum_i\beta_i\frac{\partial[N]}{\partial\bar{x}_i}+\rho\omega[N]^T[H][N]+\rho[N]^T[A][\dot{A}]^T[N]+[B]^T[F]^T[E][D][B]\Big)d\bar{V}\cdot\{\bar{v}\}$$

$$-\int_{\bar V}([C]\{p\}+\rho\phi)[B]^T\{J\}d\bar V$$

$$=\int_{\bar A}(p+\rho\phi)[N]^T\{n\}d\bar A-\int_{\bar A}[N]^T[A][S][E]]\{\bar T\}d\bar A-\int_{\bar V}\rho[N]^T d\bar V\cdot[A]\{\dot u_0\}$$

$$-\dot\omega\int_{\bar V}\rho[N]^T\{\bar x\}d\bar V-\omega\int_{\bar V}\rho[N]^T[A][\dot A]^T\{\bar x\}d\bar V-\int_{\bar V}\rho\,\omega[N]^T[H]\{\beta\}d\bar V \quad \cdots\cdots (17)$$

および連続の式

$$\int_{\bar V}[C]^T\{J\}^T[B]\,d\bar V\cdot\{\bar v\}=\{0\} \quad \cdots\cdots (18)$$

式(17)，(18)はニュートン流体に関する構成方程式

$$\{\bar\tau\}=[D]\{\bar e\} \quad \cdots\cdots (19)$$

を用いている。ここに[D]は粘性マトリックスである。式(17)の右辺は等価節点力を構成するが、動座標原点の、すなわち物体の加速度運動による見かけの力が生ずることを示す。式(18)は連続の条件、すなわち不変量に関する条件であるから、静止座標系に関するものと同一となっている。

5. バネ支持された物体の運動

図−1の物体SがバネでS支持されているとする。2次元運動を考えると、物体自身は剛体であるとすれば、その運動方程式は

並進運動

$$M\ddot y_i+C\dot y_i+Ky_i=\int_S T_i\,dS=\int_S \sigma_{ij}n_j\,dA \quad \cdots\cdots (20)$$

回転運動

$$I\ddot\theta+D\dot\theta+T\theta=\int_S(-T_1\bar x_2+T_2\bar x_1)dS=\int_S\{\bar z\}^T\{T_i\}dS \quad \cdots\cdots (21)$$

ここでT_iは力，σ_{ij}は物体表面の応力テンソルである。

$$\{T_i\}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{bmatrix}\{n\}=[A]^T[\bar\sigma]\{\bar n\} \quad \cdots\cdots (22)$$

$$=[A]^T(-p[I]+[\bar\tau])\{\bar n\}=-[A]^T\{\bar n\}p+[A]^T[\bar\tau]\{\bar n\}$$

であるから式(20)，(21)はまとめて次のようにかかれる。

$$[M]\{\ddot d\}+[C]\{\dot d\}+[K]\{d\}=\int_S[G][A]^T[\bar\sigma]\{\bar n\}dS$$

$$=-\int_S p[G][A]^T\{\bar n\}dS+\int_S[G][A]^T[\bar\tau]\{\bar n\}dS \quad \text{—— (23)}$$

ここに[M]，[C]，[K]は3行3列マトリックスである。$\{d\}=\{y_1\ y_2\ \theta\}^T$であり，$\{\dot d\}=\{\dot y_1\ \dot y_2\ \dot\theta\}^T=\{u_{10}\ u_{20}\ \omega\}^T$である。式(17)，(18)，(23)を連立に解くことによりバネ支持された物体の粘性流れでの応答を計算することができよう。流体中での物体の自励振動や渦のlock in現象をも数値的に解析することも不可能でないように思われる。

1) O.C.Zienkiewicz 他著「マトリックス有限要素法」 2) Pin Tong "The Finite Element Method for fluid Flow" 1970年 日本セミナー 3) 藤本 他 "有限要素法による非定常粘性流れの解析" 第22回応用力学連合講演会
4) Lemieux et al. "Variational Principle in Fluid Dynamics" EMDiv. ASCE, Vol.96, 1970