有限要素法による弾性波の解析例

東北工業大学　正員　秋田　宏

まえがき

前回の東北支部技術研究発表会において、著者は、有限要素法を用いることにより、任意断面形無限長棒中の弾性波の解析が可能であることを指摘した。ここでは、前回の内容に若干の訂正と追加を行いながら、再び方法論を概観し、一部の解析例を示すものである。

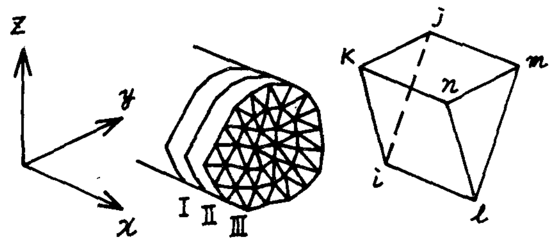
従来、波動伝播問題への有限要素法の適用は、衝撃荷重に対する応答を調べるといった方式で行なわれている。著者の研究は、無限長棒中に存在できる sin 形の解を求めるもので、偏微分方程式の素解を求める過程と同等のことを、有限要素法を用いて行うものである。すなわち、棒の軸方向には sin 形と仮定して変数分離し、断面内の２次元的な変化を有限要素法により求める。

方法の概要

図の様に、弾性波の進行方向である無限長棒の軸を z 軸とするデカルト座標をとり、軸に垂直で等間隔な断面 I, II, III を考える。これらの面にはさまれた部分を５面体要素を用いて分割すると、３次元有限要素法の考え方により、II 面上の各節点における運動方程式には、I, II, III 面上の変位が入ってくる。ところが、z 方向に進行する sin 形の関数を仮定すると、I, III 面上の変位は II 面の対応する節点の変位に比例する為、（位相のずれであるから、比例定数は複素数である）、結局は II 面上の変位だけで足り、本質的には２次元の有限要素法と同じになる。

Lamb の解、Pochhammer の解との類推から、軸方向変位と横方向変位との間に $\frac{\pi}{2}$ の位相差を考えると、

$$u = U(y,z)\cdot e^{i(\omega t - kz)}$$
$$v = V(y,z)\cdot i\cdot e^{i(\omega t - kz)}$$
$$w = W(y,z)\cdot i\cdot e^{i(\omega t - kz)}$$



ただし、$K = 2\pi/\Lambda$、Λ は波長、$\omega = KC$、C は位相速度。よって Λ を与えると II 面に対する I, III 面の変位の位相のずれが定まる。いま面間の距離を d として

$$e^{i(2\pi d/\Lambda)} = a + bi$$

とおくと、II, III 面間にある要素の変位ベクトルは、５面体１次要素の場合

$$\{u_1, iu_2, iu_3, u_4 \cdots \quad iu_9, (a-bi)u_1, i(a-bi)u_2, i(a-bi)u_3 \cdots \quad \}\cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

となる。要素の剛性マトリクスは18行18列であるが、ここで、変位ベクトルに掛かっている複素係数を剛性マトリクスの中に移し、II 面上の変位の成分

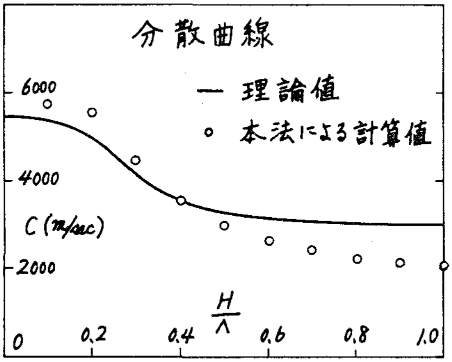
$$\{u_1, u_2, u_3 \cdots \quad u_9\}$$

からなる新たな変位ベクトルに対応した、９行９列の複素剛性マトリクスを求める。さらに対応す

るⅠ, Ⅱ面間の要素から得られる複素マトリクスと加え合わせると、最初の剛性マトリクスの対称性から打消し合う項が多く、結局は、1, 4, 7行は全て実数でその他の行は全て純虚数である剛性マトリクスが得られる。　これは、節点力ベクトルと節点変位ベクトルが同一の位相になることを表し、弾性波動を取り扱っているのであるから当然の結果である。　同様のことを質量マトリクスについても行い、その結果を運動方程式として表すと

$$K_{11}u_1+K_{12}u_2+\cdots-\omega^2(M_{11}u_1+M_{12}u_2+\cdots\ )=0$$
$$i\{K_{21}u_1+K_{22}u_2+\cdots-\omega^2(M_{21}u_1+M_{22}u_2+\cdots\ )\}=0$$
$$\vdots$$

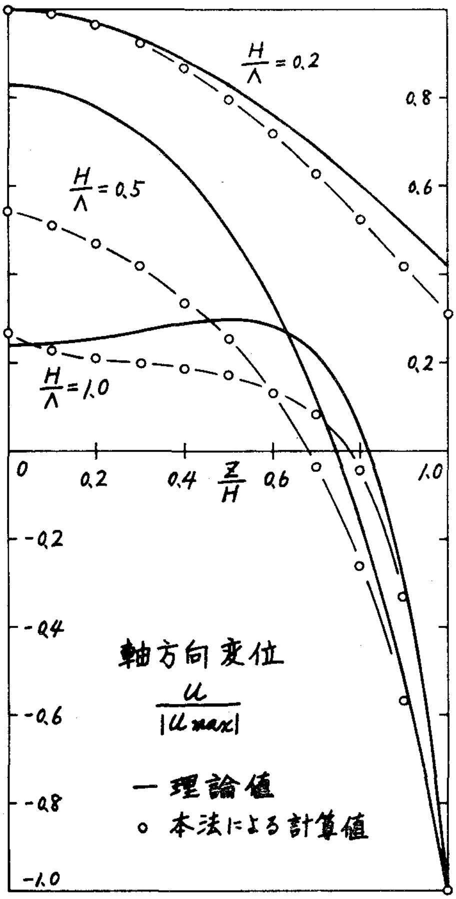
となり、ここでは i が省略できるから、これは実数マトリクスの固有値問題に帰着する。　ここで K_{11}, K_{12} M_{11}, M_{12} 等は全体の剛性マトリクスおよび質量マトリクスの要素。



解析例および考察

上の方法の妥当性を確かめる為に、Lamb により理論解が求められている無限板について解析を試みた。結果は図に示したように、非常に良く傾向が出ているが、誤差が大き過ぎる。（分散曲線で $H/\Lambda=1.0$ のとき約 30 %）　ここで H は板厚の半分であり、Z は板厚方向にとった座標である。　剛性マトリクスや質量マトリクスの積分には、x, y, z の多項式で表わした変位関数を用いた。　尚、使用した計算機は、東北工業大学の TOSBAC 3400 モデル 41 である。

誤差が大きい原因の1つとしては、用いた要素が6節点の1次要素であることが考えられる。　1次要素では、往々にして精度を上げ得ないことは周知の通りである。　著者は、現在18節点要素による解析を行っており、当日はその結果も合わせて発表する予定である。



参考文献

1、秋田宏 "任意断面棒中の弾性波の応力分布について" 昭46 東北支部技術研究発表会講演概要 P205

2、ホランド，ベル "有限要素法—応力解析への応用" 川井忠彦監訳 朝倉書店 1972