テンソル衝撃波の伝播について

東北大学工学部
正会員　多谷　虎男

§1　序言

従来の地震波伝播に関する理論、特にRayleigh波の伝播に関する理論は、著者の研究によれば、誤りであることが判明した。　Rayleigh波に関する従来の理論と同一の算法による解析は、又、棒の縦振動に関するPochhammerの理論に見られるが、その結果は、周知の初等力学における、棒状弾性体内の縦波の速度の公式　$C_0=\sqrt{E/\rho}$　と終局的に一致することゝなっている。　これは、以下に述べる解析並びに実験結果に照らして誤りであって、元来、弾性体内の弾性波の速度としては、その境界条件が如何様であれ、次の二つの位相速度に狭まれる範囲外に出ることはない。

最高速度　$C_1=\sqrt{\frac{2G}{\rho}\frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}}$　（膨張体積波速度）

最低速度　$C_2=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$　（回転波速度）

以下、著者の研究結果の一端について、その概要を述べる。

§2　棒状固体弾性体内の衝撃波の伝播に関する理論

凡ての振動現象は、従来解析が行はれて来た様なスカラー振動ではなく、テンソル振動として解析されねばならない。　固体弾性体内の弾性波は境界条件の如何を問はず、常に次の二つのNavierの方程式を満足する。即ち

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\phi &= 2G\,\frac{1-\nu}{1-2\nu}\nabla^4\phi+div.\,\mathbf{X}\\ \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\Psi &= G\,\nabla^4\Psi\end{aligned}\right\}\quad\text{-----------------------------}(1)$$

茲に ϕ は変位場のスカラー・ポテンシャル、 Ψ はベクトル・ポテンシャルを表し、$\mathbf{X}$ は単位体積当りの質量力を示すものとする。

上式(1)は、テンソル方程式であるから、坐標系の如何を問はず、凡ての場合に成立する。

今、円柱棒について、図1に示す様な、円壔坐標系をとり、棒の一端に与へられた衝撃による弾性波のスカラーポテンシャル ϕ 及び、ベクトル・ポテンシャル Ψ を次の様に仮定する。

$$\phi=U_0(r)\,exp[i(\gamma z-pt)]\quad\text{----------------}(2)$$

$$\Psi=\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}V(r)\cdot exp[i(fr+gz-pt+\delta)]\quad\text{-------}(3)$$

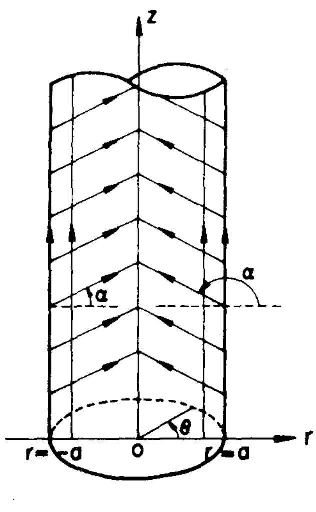

図 1

但し、 $f=\gamma_2\cos\alpha$， $g=\gamma_2\sin\alpha=\gamma$， $\gamma_2=\frac{p}{c_2}$， $c_2^2=\frac{G}{\rho}$、 $\delta=\mp a\gamma_2\cos\alpha$

又、上式(2)及び(3)式の右辺は凡て所謂“物理量”を表はすものとする。

(2)式を(1)式の第1式に代入すれば、次式が得られる。 (以下簡単の為に $X=0$ とする。)

$$\nabla^2\left\{U_0''(r)+\frac{1}{r}U_0'(r)-(\gamma^2-\gamma_1^2)U_0(r)\right\}\exp[i(\gamma z-pt)]=0 \quad \text{------(4)}$$

$U_0''(r)+\frac{1}{r}U_0'(r)-(\gamma^2-\gamma_1^2)U_0(r)=F(r)$ と置けば、上式(4)式は次の様になる。

$$F''(r)+\frac{1}{r}F'(r)-\gamma^2F(r)=0 \quad \text{------(5)}$$

上式において変数 r を $i\gamma r$ に変換すれば、上式(5)式は0階のBesselの微分方程式であることがわかる。 従って(5)式の有限な積分解は、

$$F(r)=A_0J_0(i\gamma r) \quad \text{------(6)}$$

である。 但し、A_0は任意常数、J_0は0階のBessel函数を表はすものとする。 故に、

$$U_0''(r)+\frac{1}{r}U_0'(r)-(\gamma^2-\gamma_1^2)U_0(r)=A_0J_0(i\gamma r) \quad \text{------(7)}$$

上式(7)式から一般解として次式が得られる。

$$U_0(r)=K_0J_0(i\gamma r)+L_0J_0(ir\sqrt{\gamma^2-\gamma_1}) \quad \text{------(8)}$$

但し、K_0，L_0は任意常数とする。

(8)式から、スカラー・ポテンシャル ϕ に対応する変位 $\mathfrak{u}_0$ として次式が得られる。

$$\mathfrak{u}_0=\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{Bmatrix}K_0i\gamma J_0'(i\gamma r)+L_0i\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2}\,J_0'(ir\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2})\\ 0\\ \left[K_0J_0(i\gamma r)+L_0J_0(ir\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2})\right]i\gamma\end{Bmatrix}\cdot\exp[i(\gamma z-pt)] \quad \text{------(9)}$$

但し、$J_0'(\xi)$ は $\frac{\partial J_0(\xi)}{\partial\xi}$ を表はすものとする。

次に、(3)式を(1)式の第2式に代入すれば、次式が得られる。 即ち、

$$\nabla^2\begin{Bmatrix}0\\ V''(r)+\frac{1}{r}(1+2i\gamma_2r\cos\alpha)V'(r)-(1-i\gamma_2r\cos\alpha)\frac{1}{r^2}V(r)\\ 0\end{Bmatrix}\cdot\exp[i(fr+gz-pt+\delta)]=0 \quad \text{------(10)}$$

前と同様に $V''(r)+\frac{1}{r}(1+2i\gamma_2r\cos\alpha)V'(r)-(1-i\gamma_2r\cos\alpha)\frac{1}{r^2}V(r)=H(r)$ と置けば(10)式は次の様になる。

$$H''(r)+\frac{1}{r}(1+2i\gamma_2r\cos\alpha)H'(r)+\frac{1}{r^2}(-\gamma_2^2r^2+i\gamma_2r\cos\alpha-1)H(r)=0$$

変数 r を $x=i\gamma_2r$ に変換すれば、上式は次の様になる。

$$G''(x)+\frac{1}{x}(1+2x\cos\alpha)G'(x)+\frac{1}{x^2}(x^2+x\cos\alpha-1)G(x)=0 \quad \text{------(11)}$$

上式(11)式の有限な積分解は、

$$G(x)=A\exp(-x\cos\alpha)J_1(x\sin\alpha) \quad \text{------(12)}$$

である。 但し、Aは任意常数、J_1は1階のBessel函数を表はすものとする。 従って、

$$H(r)=A\exp(-i\gamma_2r\cos\alpha)J_1(i\gamma_2r\sin\alpha) \quad \text{------(13)}$$

故に、次式が得られる。

$$V''(r)+\frac{1}{r}(1+2i\gamma_2r\cos\alpha)V'(r)+\frac{1}{r^2}(i\gamma_2r\cos\alpha-1)V(r)=A\exp(-i\gamma_2r\cos\alpha)J_1(i\gamma_2r\sin\alpha) \quad \text{------(14)}$$

上式(14)式の特別解は、

$$V(r)=K_1\exp(-i\gamma_2r\cos\alpha)J_1(i\gamma_2r\sin\alpha) \quad \text{------(15)}$$

である。 更に、(14)式の補足函数は次の様にして見出される。 即ち、

$$V''(r)+\frac{1}{r}(1+2i\gamma_2 r\cos\alpha)V'(r)+\frac{1}{r^2}(i\gamma_2 r\cos\alpha-1)V(r)=0$$

上式の変数 r を、$x=i\gamma_2 r$ に変換して

$$S''(x)+\frac{1}{x}(1+2x\cos\alpha)S'(x)+\frac{1}{x^2}(x\cos\alpha-1)S(x)=0 \qquad \text{----------(16)}$$

但し、$S(x)=V(r)$ とする。

(16)式の有限な解は、

$$S(x)=C\exp(-x\cos\alpha)J_1(ix\cos\alpha) \qquad \text{------------(17)}$$

但し、Cは任意常数・J_1は1階の Bessel 函数を表はすものとする。 従って、(14)式の補足函数は、

$$V(r)=C\exp(-i\gamma_2 r\cos\alpha)J_1(-\gamma_2 r\cos\alpha) \qquad \text{------------(18)}$$

である。 (15)式の $V(r)$ 及び、(18)式の $V(r)$ は、次の Bessel 函数

$$\exp(-i\gamma_2 r\cos\alpha)J_1[\gamma_2 r\exp(i(\pi-\alpha))] \qquad \text{-----------(19)}$$

内の複素変数の、それぞれ、実数部分及び、虚数部分を変数とする函数とからなっているから、この意味から夫々、次の様に表示することにする。

$$\left.\begin{aligned}\exp(-i\gamma_2 r\cos\alpha)J_1(-\gamma_2 r\cos\alpha)&=R[\mathcal{J}_1]\\ \exp(-i\gamma_2 r\cos\alpha)J_1(i\gamma_2 r\sin\alpha)&=I[\mathcal{J}_1]\end{aligned}\right\} \qquad \text{-----------(20)}$$

故に、最終的に(14)式の有限解は、次の様になる。

$$V(r)=K_1\cdot I[\mathcal{J}_1]+C\cdot R[\mathcal{J}_1] \qquad \text{------------(21)}$$

衝撃による変位場ベクトル $\mathfrak{u}$ は、(9)式及び(21)式から次の様になる。

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}&=\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u}'\\
&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi_z}{\partial\theta}-\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\psi_r}{\partial z}-\dfrac{\partial\psi_z}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial(r\psi_\theta)}{\partial r}-\dfrac{\partial\psi_r}{\partial\theta}\right]\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}K_0 i\gamma J_0'(i\gamma r)+L_0 i\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2}\,J_0'(ir\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2})\\ 0\\ i\gamma\{K_0J_0(i\gamma r)+L_0J_0(ir\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2})\}\end{pmatrix}\exp[i(\gamma z-pt)]\\
&\quad+\begin{pmatrix}-i\gamma\{K_1\cdot I[\mathcal{J}_1]+C\cdot R[\mathcal{J}_1]\}\\ 0\\ (\frac{1}{r}+i\gamma_2\cos\alpha)\{K_1\cdot I[\mathcal{J}_1]+C\cdot R[\mathcal{J}_1]\}+\{K_1\cdot I'[\mathcal{J}_1]+C\cdot R'[\mathcal{J}_1]\}\end{pmatrix}\exp[i(fr+gz-pt+\delta)]\end{aligned} \qquad \text{-----------(22)}$$

但し、$J_0'(\xi)$ は $\frac{\partial}{\partial\xi}J_0(\xi)$ を示し、又 $I'[\mathcal{J}_1]$ 及び $R'[\mathcal{J}_1]$ は夫々 $\frac{\partial}{\partial r}(I[\mathcal{J}_1])$ 及び、$\frac{\partial}{\partial r}(R[\mathcal{J}_1])$ を示すものとする。

次に以下、この問題を次の二つの場合に分けて考えることにする。

(i) $\alpha \neq 90°$ なる場合

この場合には、衝撃波群の原因となる波が、縦方向膨張波であるから、$\gamma=\gamma_1=\frac{p}{c_1}$ と仮定してよい。従って、この場合(22)式は次の様になる。

$$\mathfrak{u}=\begin{pmatrix}K_0 i\gamma_1 J_0'(i\gamma_1 r)\\ 0\\ K_0 i\gamma_1 J_0(i\gamma_1 r)\end{pmatrix}\exp[i(\gamma_1 z-pt)]$$

$$
+\begin{Bmatrix} -i\gamma_1\{K_1\cdot I[\vartheta_1]+C\cdot R[\vartheta_1]\} \\ 0 \\ \left(\frac{1}{r}+i\gamma_2\cos\alpha\right)\{K_1\cdot I[\vartheta_1]+C\cdot R[\vartheta_1]\}+\{K_1\cdot I'[\vartheta_1]+C\cdot R'[\vartheta_1]\} \end{Bmatrix}\exp[i(fr+gz-pt+\delta)] \qquad \text{----------(23)}
$$

従って、応力成分が境界において0にならなければならないという境界条件式は次の様になる。

$$
\left\{\gamma_2^2 J_0''(i\gamma_1 a)-\left(\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}-2\right)\frac{i\gamma_1}{a}J_0'(i\gamma_1 a)+\left(\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}-2\right)\gamma_1^2 J_0(i\gamma_1 a)\right\}K_0
$$
$$
=2\gamma_1\{-iI'[\vartheta_1]+\gamma_2 I[\vartheta_1]\cos\alpha\}K_1+2\gamma_1\{-iR'[\vartheta_1]+\gamma_2 R[\vartheta_1]\cos\alpha\}C \qquad \text{---------(24)}
$$

$$
2\gamma_1^2 J_0'(i\gamma_1 a)K_0+\left\{\left(\gamma_2^2\cos 2\alpha+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}i\gamma_2\cos\alpha\right)I[\vartheta_1]-\left(\frac{1}{a}+2i\gamma_2\cos\alpha\right)I'[\vartheta_1]-I''[\vartheta_1]\right\}K_1
$$
$$
+\left\{\left(\gamma_2^2\cos 2\alpha+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}i\gamma_2\cos\alpha\right)R[\vartheta_1]-\left(\frac{1}{a}+2i\gamma_2\cos\alpha\right)R'[\vartheta_1]-R''[\vartheta_1]\right\}C=0 \qquad \text{-------(25)}
$$

（応力成分 $\sigma_{r\theta}$ は、棒の内部いたるところで0となる。）

上式(24)及び(25)式を連立方程式とすることによって、積分常数の比 $\frac{K_1}{K_0}$ 及び $\frac{C}{K_0}$ を決定することが出来る。

(ii) $\alpha = 90°$ の場合　　省略

§3 従来の理論に関する批判

一軸応力状態を仮定している棒の縦振動に関する初等力学理論が明らかに矛盾を孕んでいるものであることは言うまでもないので、ここでは省略するが、この問題に関する高等理論として従来容認されて来た、L. Pochhammer の理論（A. E. H. Love："*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*", Cambridge University Press, London, 1934, P287）に対する批判を次に述べることにする。

著者は、L. Pochhammer の理論は次の諸点において誤謬を犯していると考えるものである。

(i) L. Pochhammer の理論は、縦方向膨張波に対応する反射波として、境界表面において常に発生せられる回転波を脱落している。

(ii) L. Pochhammer の理論解は、Navier の方程式の特別解のみに相当し、Navier の方程式の一般解ではない。従って、その解は凡ての境界条件式を満足させるだけの積分常数の個数に不足を来たしている。

(iii) L. Pochhammer の方法は、積分常数の個数の不足によって生ずる不合理を補填するために、境界条件を満足する様に衝撃波の位相速度を調整決定する方法であるが、位相速度はこの様に境界条件によって変化するものではない。

§4 実験結果　　席上説明する。

§5 結論

棒の中に生ずる縦波の速度は、従来公式の様に $C_0=\sqrt{Eg/\rho}$ ではなく $C_1=\sqrt{\frac{2G}{\rho}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)}$ であることが解析的にも、実験検証的にも、明瞭に証明せられた。（棒断面が矩形断面の場合についても著者は、既に完全解析解を得ている。）

参考文献

1. A. E. H. Love："A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Cambridge University Press, London, 1934.
2. H. Kolsky："Stress Waves in Solids", Dover Publications Inc., New York, 1963.
3. Hermann Schlichting："Boundary Layer Theory", McGraw Hill Co., New York, 1960.
4. Y. C. Fung："Foundation of Solid Mechanics", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1965.
5. J. A. Schouten："Ricci-Calculus", Springer-Verlag, Göttingen, 1954.